



LEHRSTUHL FÜR  
**HYDRAULIK UND  
GEWÄSSERKUNDE**  
UNIV.-PROF. DR.- ING. F. VALENTIN

---

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

# **HYDRAULIK I**

**EINFÜHRUNG  
IN DIE  
HYDROMECHANIK**

---

**MÜNCHEN, APRIL 2001**

## Vorwort

Das Skriptum Hydraulik I „Einführung in die Hydromechanik“ ist in der Fassung vom SS 2000- wie bereits in den vorangegangenen Jahren - in den letzten Wochen überarbeitet worden. Eine komplette Fassung des Skriptums kann auch über die Lehrstuhl-Adresse heruntergeladen werden. Hier finden sich auch Hinweise über aktuelle Änderungen.

Mit der Überarbeitung wurde zugleich eine ausführlichere Darstellung der Inhalte verbunden. Die Entwicklung im Bereich der Rechnerunterstützung bedingt zwangsweise eine stärkere Grundlagenorientierung, da heute auch schon mehrdimensionale Strömungen berechnet werden können. Der Stoff wurde dabei so aufbereitet, dass er einer universitären Ausbildung genügt. Unvermeidbar ist dabei, dass die Grundlagen zunächst allgemein dargestellt und erst dann auch für einfachere Fragestellungen vereinfacht werden. Die bisher in der Hydraulik fehlende durchgängige Beschreibung der aus der Kontinuumsmechanik abgeleiteten Grundlagen über die Materialgesetze zu den einzelnen Bewegungsgleichungen wurde hier konsequent beibehalten. Damit wird die Hydromechanik an die in der Festkörpermechanik übliche Herangehensweise der Verbindung des Spannungszustandes mit den entsprechenden Materialgleichungen angenähert. Dass dies nicht konsequent möglich ist, liegt an den speziellen Problemen der turbulenten Strömung.

Eine Ausnahme von dieser Darstellung bildet die Behandlung der Hydrostatik. Sie wird wie bisher üblich noch vor der Ableitung der Grundgleichungen behandelt. Dafür werden einige Inkonsistenzen in Kauf genommen, auf welche in der Vorlesung hingewiesen wird. Da in der Prüfung zwischenzeitlich auch ein allgemeiner Teil ohne Hilfsmittel zu bearbeiten ist, bietet das neue Skriptum verstärkt Hinweise auf Stärken und Schwächen der verwendeten Methoden. Es ist trotz des vergrößerten Umfangs alles andere als ein Lehrbuch und soll dazu anregen, in schwierigen Fragen auch zusätzliche Literatur zu Rate zu ziehen.

Wie immer werden meine Mitarbeiter und ich uns bemühen, durch begleitende Veranstaltungen den vorgetragenen Stoff zu ergänzen. Neben der Übung wird die Möglichkeit geboten, im Labor anhand von Demonstrationsmodellen das Verständnis für die Anwendung der aufbereiteten Grundlagen zu wecken. Bei entsprechender Nachfrage besteht auch die Möglichkeit, kleine Experimente selbstständig durchzuführen. Der umfangreichere Text ermöglicht auch verstärkt Hinweise auf Phänomene der Strömungsmechanik. Ich würde mich freuen, wenn durch die Angebote des Lehrstuhls das Interesse für diese faszinierende Disziplin vertieft werden könnte.

Die Übung Hydraulik I im SS 2001 wird Frau Dipl.-Ing. Katrin Kessler halten. Anregungen zur Gestaltung und möglichen Ergänzung des Skriptums sind erwünscht.

München, Anfang April 2001

gez. Valentin

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Allgemeine Einführung</b>	<b>3</b>
1.1 Definitionen .....	3
1.2 Einheiten und Symbole .....	4
1.3 Eigenschaften des Wassers .....	4
1.3.1 Dichte.....	5
1.3.2 Volumenelastizität .....	6
1.3.3 Viskosität .....	6
1.3.4 Ausbreitung von Störungen .....	8
1.3.5 Oberflächenspannung .....	9
<b>2 Hydrostatik</b>	<b>12</b>
2.1 Allgemeine Angaben zum Begriff des Druckes .....	12
2.2 Gleichgewichtsbedingungen in einer ruhenden Flüssigkeit .....	14
2.3 Druckkraft.....	17
2.3.1 Auftrieb.....	19
2.3.2 Druckkraft auf die ebene Wand.....	21
2.3.3 Druckkraft auf einfach gekrümmte Flächen .....	23
2.4 Schwimmfähigkeit von Körpern.....	25
2.5 Flüssigkeitsmanometer .....	27
2.6 Spiegellagen in bewegten Gefäßen.....	28
2.6.1 Anfahrbeschleunigung .....	29
2.6.2 Rotation eines flüssigkeitsgefüllten Zylinders.....	30
2.7 Druckverteilung in Fließgewässern .....	32
<b>3 Kinematik der Flüssigkeiten</b>	<b>37</b>
3.1 Betrachtungen im Strömungsfeld .....	37
3.2 Beschreibung der Bewegung innerhalb des Strömungsfeldes .....	37
3.3 Allgemeine Beschreibung der Feldgrößen und ihrer Veränderung .....	38
3.4 Geschwindigkeit und Beschleunigung.....	40
3.5 Verformungen eines Flüssigkeitsteilchens im Strömungsfeld.....	44
3.6 Ausgezeichnete Linien eines Strömungsfeldes.....	48
3.7 Volumenstrom und Durchfluss.....	52
3.8 Die Stromfunktion .....	53
3.9 Alternative Darstellung der verwendeten Differentialoperatoren.....	54
<b>4 Grundgleichungen der Hydromechanik</b>	<b>57</b>
4.1 Erhaltungssätze der Hydromechanik .....	57
4.1.1 Das Gesetz der Massenerhaltung für die Flüssigkeitsbewegung .....	58
4.1.2 Impulssatz .....	61
4.1.3 Das Gesetz für die Energieerhaltung bei der Flüssigkeitsbewegung .....	68
4.2 Erfassung der Oberflächenkräfte .....	69
4.2.1 Laminare Strömung .....	70

4.2.2	Turbulente Strömung .....	70
4.2.2.1	Schwankungsbewegungen .....	70
4.2.2.2	Prandtlscher Mischungsweg .....	72
4.3	Bewegungsgleichungen .....	74
4.3.1	Navier-Stokes-Gleichungen .....	75
4.3.2	Reynolds-Gleichungen .....	76
4.3.3	Eulersche Bewegungsgleichungen .....	76
4.3.4	Bernoulli-Gleichung .....	76
<b>5</b>	<b>Berücksichtigung der Randbedingungen</b>	<b>88</b>
5.1	Ursachen der Bewegung .....	88
5.2	Berandungen des Strömungsfeldes .....	89
5.2.1	Feste Berandung .....	89
5.2.1.1	Couette-Strömung .....	90
5.2.1.2	Turbulente Scherströmung in der Nähe einer festen Wand .....	92
5.2.1.3	Grenzschichtentwicklung an der ebenen Platte .....	94
5.2.1.4	Grenzschicht unter Einwirkung von Druckgradienten .....	95
5.2.2	Flüssige Berandung .....	98
5.2.2.1	Strahlhydraulik .....	98
5.2.2.2	Eigenschaften des Tauchstrahls .....	100
5.2.3	Gasförmige Berandung .....	102
5.3	Anwendungen .....	103
5.3.1	Widerstand umströmter Körper .....	103
5.3.2	Wandstrahlen .....	106
<b>6</b>	<b>Potentialströmung</b>	<b>112</b>
6.1	Potentialtheorie .....	112
6.2	Einfache Potentialströmungen .....	114
6.2.1	Parallelströmung .....	114
6.2.2	Quellen- und Senkenströmung .....	114
6.2.3	Potentialwirbel .....	116
6.3	Strömungsbilder für vorgegebene Randbedingungen .....	117
6.4	Grenzen der Anwendbarkeit der Potentialtheorie .....	119
6.5	Anwendung in der Grundwasserhydraulik .....	121
<b>Literaturverzeichnis</b>	.....	<b>125</b>

# 1 Allgemeine Einführung

## 1.1 Definitionen

Unter **Hydraulik** wird hier eine **angewandte Hydromechanik** für die technische Praxis im Bereich des Bauingenieurwesens verstanden. Ihre theoretischen Grundlagen kommen aus der Hydromechanik. Neben der Theorie dienen Experimente an physikalischen Modellen und die Anwendung numerischer Methoden (mathematische Modelle) zur Lösung von Strömungsproblemen.

Die Hydromechanik ist Teil der Mechanik, welche in die beiden Bereiche **Festkörpermechanik** und **Fluidmechanik** unterteilt wird. Als Fluide werden dabei Flüssigkeiten und Gase bezeichnet. Bindeglied zwischen der Festkörpermechanik und der Fluidmechanik ist die **Rheologie**. Die Rheologie ist die Lehre von der Deformation und dem Fließen von Stoffen. In der Fluidmechanik wird unterschieden in die **Fluidstatik**, die Lehre von den Fluiden in Ruhe, und die **Fluiddynamik**, in welcher die Zusammenhänge zwischen Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und den dabei ausgeübten Kräften behandelt werden. Ähnlich wie in der Festkörpermechanik werden in der **Kinematik** Geschwindigkeiten ohne Einwirkung von Kräften betrachtet.

In der klassischen Form war die Hydromechanik als Teil der heutigen Fluidmechanik stark an der Mathematik ausgerichtet. Dabei wurden Erkenntnisse für das sogenannte ideale Fluid, das als inkompressibel und reibungsfrei angesehen wurde, gewonnen. Insbesondere wegen der Annahme der Reibungsfreiheit erwies sich dies als wenig praktikabel. Deswegen wurde die Rückversicherung mit dem Experiment gesucht, was ohne Kenntnis der grundlegenden physikalischen Vorgänge häufig zu empirischen Beziehungen führte. Erst mit Beginn der Grenzschichtforschung gelang es, die bis dahin angewandten empirischen Verfahren immer weiter in den Hintergrund zu drängen.

Das Unterscheidungsmerkmal zwischen Fluiden und Festkörpern ist die Fließfähigkeit. Beim Fluid führen bereits geringste Schubspannungen zu Verformungen. Nach dem Ende der Einwirkung erfolgt keine Rückkehr zur ursprünglichen Form. Fluide sind demnach nicht formstabil. Während Schubspannungen in Festkörpern von der Größe der Verformungen abhängen, ist bei den Fluiden dafür die Verformungsgeschwindigkeit maßgeblich. Gegenüber den Flüssigkeiten haben Gase eine weit geringere Dichte und eine höhere Kompressibilität.

In der Hydraulik können mehrere Phasen am Strömungsvorgang beteiligt sein, man spricht dann von der **Mehrphasenströmung**. Die einzelnen Phasen können dabei in allen Aggregatzuständen auftreten. Beispiele für Zweiphasenströmungen sind z.B.:

flüssig-flüssig:	Süßwasser-Salzwasser
flüssig-fest:	Wasser-Geschiebe im Fluss
flüssig-gasförmig:	Wasser-Luft.

Eine wesentliche Eigenschaft der Fluide ist ihre Viskosität. Damit wird ein Widerstand gegen die Verformung ausgelöst. Das reibungsfreie ideale Fluid hat keine Viskosität.

Anwendungsgebiete der Hydraulik im Bereich des Bauingenieurwesens sind vielfältig. Sie lassen sich am besten anhand der verwendeten Unterkapitel aufzeigen. Die **Rohrhydraulik** ist die Grundlage für die Bemessung von Versorgungsleitungen für den Transport von Wasser, Erdöl und Gas ebenso wie für den Anlagenbau in der Verfahrenstechnik. Spektakulärste Anwendungen sind die Hochdruckleitungen bei Wasserkraftwerken. Im Gegensatz zu den unter Druck durchflossenen Rohrleitungen werden in der **Gerinnehydraulik** Strömungen mit einer freien Oberfläche behandelt. Darunter sind Bäche und Flüsse als natürliche Gerinne ebenso zu verstehen wie die künstlichen Gerinne für die Be- und Entwässerung, Triebwasserkanäle und Gerinne im Bereich der Abwasserableitung und -behandlung.

Zunehmend an Bedeutung im Bereich der Wasserwirtschaft gewinnt die Behandlung von **Grundwasserströmungen** und den damit verbundenen Transporterscheinungen für natürliche und im Zusammenhang mit Altlasten weniger erwünschte Inhaltsstoffe. Diese Themen bleiben allerdings dem vertieften Studium der Hydraulik vorbehalten. Die zunehmend als allgemeingültig anerkannten Grundlagen der Hydraulik können auch zur Behandlung von Strömungsvorgängen mit anderen Fluiden herangezogen werden. Beispielhaft genannt seien hier die Luft zur Bewetterung von Stollen im Tunnelbau und der Transport von Beton in Rohrleitungen.

## 1.2 Einheiten und Symbole

Basiseinheiten auf der Grundlage des internationalen Einheitensystems (SI) Systeme International d'Unites:

Benennung	Zeichen	Einheit
Länge	l	m
Masse	m	kg
Zeit	t	s
Temperatur	T	K

Die wichtigsten abgeleiteten Einheiten sind:

Benennung	Zeichen	Einheit
Kraft	F	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Druck	p	$Pa = N \cdot m^{-2}$

Nach DIN 4044 "Hydromechanik im Wasserbau" wird hier der Begriff Zeichen anstelle von Symbol verwendet.

## 1.3 Eigenschaften des Wassers

Wasser, der besondere Stoff, ist unverzichtbar für alles Leben auf der Erde. Die Bandbreite seiner Verwendung reicht vom Lebensmittel bis hin zum Transportmittel, sei dies in Gestalt der Wasserstraßen für den Schiffsverkehr oder in Gestalt unserer Flüsse als sog. Vorfluter zur

Aufnahme der Abwässer. Scheinbare Zweckentfremdungen für viele technische Anwendungen sind nur dort möglich, wo Wasser im Wasserkreislauf im Überfluss angeboten wird. Wie eng diese geografische Begrenzung sein kann zeigt das Beispiel Bayern. Dem Überangebot in Südbayern steht das Wassermangelgebiet Nordbayern gegenüber. Doch nicht allein das quantitative Angebot ist entscheidend. Die zunehmende Einbringung von schwer abbaubaren chemischen Substanzen in das ungeschützten Grundwasservorkommen lässt qualitativ wertvolles Wasser grundsätzlich auch in unseren Breitengraden zur Mangelware werden. Der Kampf um das Wasser in den ariden Gebieten unserer Erde zeugt davon, dass wir zum Teil leichtfertig mit dieser Resource Wasser umgehen.

Der Bedeutung für das Leben auf dieser Erde ist durch eine physikalische Besonderheit des Wassers bedingt, seinem Auftreten in den drei Aggregatzuständen fest, flüssig, gasförmig. Jeder dieser drei Zustände hat besondere Bedeutung für den Wasserhaushalt. In der gasförmigen und flüssigen Phase gehört Wasser zur Gruppe der Fluide, welche durch das Fließvermögen und die nicht vorhandene Formelastizität gekennzeichnet sind. Die Einzelmoleküle unterliegen thermischen Schwingungen. In der flüssigen Phase beträgt der mittlere Molekülabstand  $3 \cdot 10^{-8}$  m. Auch im Innern eines ruhenden Wasserkörpers kann die Bewegung suspendierter Teilchen als Brownsche Molekularbewegung beobachtet werden. Ursache dafür sind Druckschwankungen an der Teilchenoberfläche, hervorgerufen durch die Moleküle des Mediums.

Wasser wird in seiner Zusammensetzung allgemein als homogen angenommen. Bei Störungen der räumlichen Homogenität kommt es zu Transporterscheinungen im Innern der Flüssigkeit. Damit wird der ungeordneten Bewegung eine geordnete überlagert.

**Tabelle 1.1:** Transporterscheinungen in Fluiden

Effekt	Übertragene Größe	Ursache	Koeffizient
Diffusion	Masse	$\Delta\rho$	molekularer Diffusionskoeffizient
Innere Reibung	Impuls	$\Delta v$	Viskosität
Wärmeleitung	Innere Energie	$\Delta T$	Wärmeleitfähigkeit

Der Prozess zur Herstellung von Gleichverteilung von Konzentrationen unterliegt dem Fickschen Gesetz, bei dem der Transport vom Gradienten der betrachteten Feldgröße und einer physikalischen Konstanten abhängt. Beim Transport der skalaren Größen Dichte  $\rho$  und Temperatur  $T$  sind diese Konstanten die molekulare Diffusionskonstante und die Wärmeleitfähigkeit. Beim Impulstransport ist die vektorielle Größe der Geschwindigkeit abhängig von der Zähigkeit (Viskosität) des Mediums. Der hier beschriebene Impulstransport quer zur Strömungsrichtung wird analog zum Massentransport als **diffusiver Impulstransport** bezeichnet.

### 1.3.1 Dichte

Für den homogenen Körper ist allgemein die Dichte  $\rho$  der Quotient aus der Masse  $m$  und dem Volumen  $V$ .

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{in} \quad \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (1.1)$$

Im allgemeinen ist die Annahme der Homogenität auch im Medium Wasser gerechtfertigt. In Ausnahmefällen (Dichteströmungen) sind Dichteunterschiede zu berücksichtigen. Die Dichte von Wasser ist temperaturabhängig  $\rho = \rho(T)$ . Für viele Vorgänge in der Natur entscheidend ist die Dichte-anomalie des Wassers, das ein Dichtemaximum oberhalb des Gefrierpunktes aufweist. Dies hat zur Folge, dass sich z.B. in Seen bei Lufttemperaturen oberhalb und unterhalb des Gefrierpunktes von Wasser eine stabile Schichtung einstellen kann. Für  $T = 4^\circ \text{C}$  beträgt für reines Wasser die größte Dichte

$$\rho = 999,97 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Für den Temperaturbereich von  $0^\circ$  bis  $100^\circ\text{C}$  ist die Dichte von reinem Wasser in Tabelle 1.2 aufgelistet. Die Dichte ist allerdings sehr stark von gelösten und suspendierten Stoffen (Salz, suspendierte Teilchen in Flüssen als Schweb) abhängig. Die Tabellenwerte sind demnach Minimalwerte für die tatsächliche Dichte.

Erwärmung über  $4^\circ \text{C}$  oder Abkühlung führt zur Volumenausdehnung. Ebenfalls von großer physikalischer Bedeutung ist die Unstetigkeit der Dichte beim Übergang zum festen Aggregatzustand (Eis). Diese Änderung ist mit einer Volumenvergrößerung von ca. 9 % verbunden.

### 1.3.2 Volumenelastizität

Unter Überdruck verursacht eine Drucksteigerung um  $\Delta p$  eine Volumenverringerung um  $\Delta V$ . Analog zum Hookeschen Gesetz gilt:

$$\Delta p = -E_w \frac{\Delta V}{V} \quad (1.2)$$

Der Elastizitätsmodul von Wasser kann mit  $E_w = 2,1 \cdot 10^3 \text{ MPa} = 2,1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  angesetzt werden.

Ein Vergleich mit dem E-Modul von Stahl zeigt, dass Wasser etwa um den Faktor  $10^2$  kompressibler ist. Demnach gilt für die Dichte bei großen Druckunterschieden, dass  $\rho = \rho(p, T)$ . Dieser Umstand ist von Bedeutung bei gespannten Grundwasservorkommen in der Grundwasserhydraulik und bei Kompressionswellen in der instationären Rohrhydraulik

### 1.3.3 Viskosität

Die Viskosität ist ein Maß für die innere Reibung, deren Ursache die molekulare Impulsübertragung ist. Jede Flüssigkeit setzt der Bewegung einen Widerstand entgegen. Versucht man eine Platte auf einer dünnen Wasserschicht zu verschieben, so ist die dabei zu überwindende Widerstandskraft proportional zur Fläche A, dem Geschwindigkeitsgradienten  $dv/dn$  der sich zwischen der bewegten Platte und dem nicht mitbewegten Untergrund einstellt und einem fluidabhangigen Proportionalitätsfaktor  $\eta$ . Für die Widerstandskraft gilt

$$F = -\eta A \frac{dv}{dn}$$

**Tabelle 1.2:** Physikalische Eigenschaften von reinem Wasser

T °C	$\rho$ g/cm³	$\eta$ $\times 10^{-3}$ Ns/m²	$v = \eta/\rho$ $\times 10^{-6}$ m²/s	$h_d = p_d/(\rho g)$
0	0,999840	1,7921	1,7924	0,06
5	0,999964	1,5108	1,5189	0,09
10	0,999700	1,3077	1,3081	0,12
15	0,999101	1,1404	1,1414	0,17
20	0,998206	1,0050	1,0068	0,24
30	0,995650	0,8007	0,8042	0,43
40	0,992219	0,6560	0,6611	0,75
50	0,98805	0,5494	0,5560	1,25
60	0,98321	0,4688	0,4768	2,02
70	0,97779	0,4061	0,4153	3,17
80	0,97183	0,3565	0,3668	4,82
90	0,96532	0,3165	0,3279	7,14
100	0,95835	0,2838	0,2961	10,33

Durch Division der Widerstandskraft F durch die Fläche A wird die Schubspannung  $\tau$  erhalten, welche als innere Reibung in einem Fluid auftritt.

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dn} \quad (1.3)$$

Dieser Ansatz geht auf Newton zurück. Der Proportionalitätsfaktor ist

$$\eta = \text{dynamische Viskosität in Pa} \cdot \text{s}$$

Auf die Dichte bezogen kann die dynamische Viskosität in die **kinematische Viskosität**

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{in} \quad \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (1.4)$$

übergeführt werden.

Bei Störung der räumlichen Homogenität, wie sie z.B. durch die ungleiche Geschwindigkeitsverteilung in einem Geschwindigkeitsfeld gegeben ist, kommt es infolge des Geschwindigkeitsgradienten zu einem Impulstransport. Dies kann durch eine Umformung von Gl. (1.3) zu

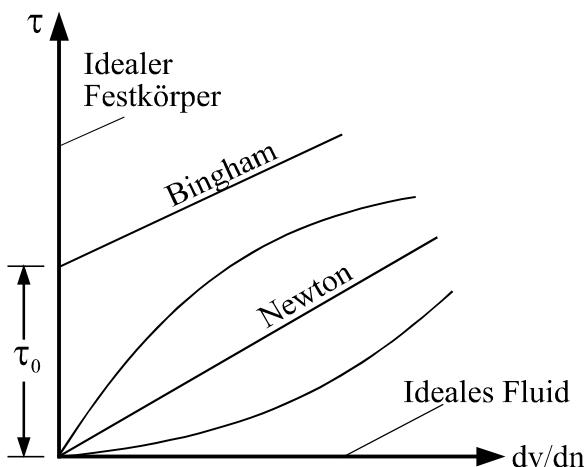
$$\tau = -v \frac{d(\rho v)}{dn}$$

leicht nachgewiesen werden. Leider besitzt der Newtonsche Ansatz nur Gültigkeit für die sog. **laminare** Bewegung (Schichtenströmung). Oberhalb bestimmter Grenzen erfahren Flüssigkeitsballen (Durchmesser weit oberhalb des Molekülabstandes) Eigenbewegungen in Form von unregelmäßigen Schwankungen, welche den Impulsaustausch wesentlich erhöhen. Man spricht dann von der **turbulenten** Fließbewegung.

Bei einer Reihe von Fluiden ist die Zähigkeit nicht proportional dem Geschwindigkeitsgradienten: Nichtnewtonsche Fluide. Zur Beschreibung wird u.a. ein Potenzansatz nach Ostwald verwendet. Der Exponent  $\kappa$  ist dabei der Flüssigkeitsindex. Für  $\kappa = 1,0$  ist  $k = \eta$  und Gl. (1.5) identisch mit Gl. (1.3).

$$\tau = -k \left( \frac{dv}{dn} \right)^\kappa \quad (1.5)$$

Die sog. ideale Flüssigkeit ist zähigkeitsfrei, setzt einer Bewegung also keinen Widerstand entgegen. In dem Diagramm wird dieses Verhalten durch die Abszisse wiedergegeben.



**Abb. 1.1:** Rheologische Eigenschaften von Fluiden

Umgekehrt stellt die Ordinate das Verhalten des idealen Festkörpers dar. Zusätzlich wird der idealen Flüssigkeit eine invariable Dichte unterstellt. Obwohl nicht existent, sind für eine Reihe von Anwendungen diese Annahmen hilfreich.

### 1.3.4 Ausbreitung von Störungen

Im Inneren von Fluiden breiten sich Störungen mit Schallgeschwindigkeit aus. Für Wasser gilt:

$$a = \sqrt{\frac{E_w}{\rho}} \quad (1.6)$$

Für eine Temperatur von 10°C kann daraus  $a = 1449$  m/s errechnet werden.

### 1.3.5 Oberflächenspannung

Die Oberflächenspannung ist eine Grenzflächenspannung an der Phasentrennfläche gegen Luft. Definiert wird die Oberflächenspannung zu

$$\sigma = \text{Arbeit/Fläche in } \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$T = 20^\circ\text{C} \rightarrow \sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} \quad (\text{Wasser / Luft})$$

Ursache der Oberflächenspannung sind Adhäsionskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen. Im Inneren heben diese sich gegenseitig auf, an der Trennfläche wirken stärkere Anziehung vom Inneren als von den Gasmolekülen von außen. Um vom Inneren an die Oberfläche zu kommen, muss der Kohäsionsdruck überwunden werden. Zur Vergrößerung der Oberfläche muss demnach Arbeit geleistet werden (Luftblasen).

Von praktischer Bedeutung ist die kapillare Steighöhe  $h_k$  für runde Kapillaren vom Durchmesser  $d_k$

$$h_k = \frac{4\sigma}{\rho g d_k} \quad (1.5)$$

Die kapillare Steighöhe ist zu beachten an der Grenze des Grundwasserkörpers zu den luftgefüllten Hohlräumen des Untergrunds im Bereich der Grundwasserhydraulik.

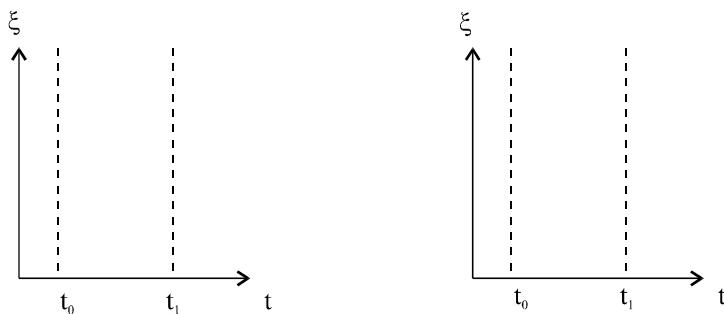
## Formelzeichen zu Kapitel 1

<b>Zeichen</b>	<b>Benennung</b>	<b>Einheit</b>
a	Schallgeschwindigkeit	m/s
$d_k$	Kapillarrohr-Durchmesser	m
$E_w$	Elastizitätsmodul von Wasser	N/m <sup>2</sup>
F	Kraft	N
g	Erdbeschleunigung	m/s <sup>2</sup>
$h_k$	kapillare Steighöhe	m
k	Ostwaldfaktor	-
m	Masse	kg
n	natürliche Koordinate normal zur Bewegungsrichtung	m
p	Druck	N / m <sup>2</sup>
v	Geschwindigkeit	m/s
V	Volumen	m <sup>3</sup>
$\eta$	dynamische Zähigkeit	Pa s
$\kappa$	Flüssigkeitsindex	-
$\nu$	kinematische Zähigkeit	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	Dichte	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	Oberflächenspannung	N/m
$\tau$	Schubspannung	N / m <sup>2</sup>

**Aufgabe 1.1**

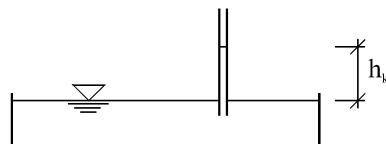
Bei einem Scherversuch zwischen zwei parallelen Platten im Abstand  $d$  befindet sich das zu untersuchende Medium zunächst im spannungsfreien Zustand. Von der Zeit  $t_0$  bis zur Zeit  $t_1$  werde die örtlich und zeitlich konstante Schubspannung  $\tau_0$  aufgeprägt, danach sei das Medium wieder spannungsfrei. Skizzieren Sie die Verschiebung  $\xi$  als Funktion der Zeit  $t$  und berechnen Sie die maximale Verschiebung

- für ein Hooke-Medium mit dem Schubmodul  $G$ ,
- für ein Newtonsches Fluid mit der Zähigkeit  $\eta$ !

**Aufgabe 1.2**

In dem dargestellten Becken befindet sich Wasser mit  $T=20^\circ\text{ C}$ . In dieses Becken wird ein dünnes Röhrchen eingetaucht, das an der Oberseite offen ist. Das Wasser wird in diesem Rohr aufsteigen.

- Worauf beruht dieser Effekt?
- Welchen Durchmesser müsste das Röhrchen haben, damit die Wasserspiegeldifferenz zum Wasserspiegel des Beckens  $h_k = 0,5 \text{ m}$  beträgt?
- In welchem Bereich der Hydraulik könnte dieser Effekt eine Rolle spielen?
- Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn das Becken nicht Wasser, sondern Quecksilber enthält?

**Aufgabe 1.3**

Wie groß ist der Überdruck in einem Regentropfen von 0,5 mm Durchmesser?

## 2 Hydrostatik

Hydrostatik ist die Lehre von der ruhenden Flüssigkeit. Ihre Hauptanwendung findet die Hydrostatik bei der Ermittlung von Kräften auf Bauwerke unter Einwirkung des Wasserdruckes.

### 2.1 Allgemeine Angaben zum Begriff des Druckes

Im Innern der ruhenden Flüssigkeit können nur Normalspannungen auftreten. Die dort wirksam werdenden Spannungen sind daher isotrop und bilden ein skalares Druckfeld. Definitionsgemäß ist der Druck  $p$  durch die Beziehung

$$\text{Druck} = \text{Kraft} / \text{Fläche}$$

$$p = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (2.1)$$

bestimmt. Sinnvoll ist diese Schreibweise nur, wenn wegen der vektoriellen Eigenschaften der Kraft  $\mathbf{F}$  in Richtung des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  der Fläche  $A$  wirkt. Zur besonderen Kennzeichnung sind Vektoren fett gedruckt. Dies ist bei gekrümmten Flächen nur für einen infinitesimal kleinen Bereich der Fall. Auf der Grundlage des internationalen Einheitensystems SI ist der Druck eine abgeleitete Größe. Seine Einheit ist das Pascal (Pa), wobei

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ hPa} = 10^2 \text{ Pa} \quad (\text{Luftdruckangabe im Wetterbericht Hektopascal})$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

In der Hydraulik ist die Reduktion auf den anschaulichen Begriff der Druckhöhe üblich:

$$\begin{aligned} 1 \text{ m (WS)} &= 9,81 \text{ kPa} = 9810 \text{ Pa} \\ &= 9810 \text{ N/m}^2 = 9,81 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen dem Druck  $p$  und der Druckhöhe ist wie folgt:

$$\text{Druckhöhe: } h = \frac{p}{\rho \cdot g} \text{ in m WS} \quad (2.2)$$

$$\text{Einheiten: } \frac{\text{N} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}} = \text{m}$$

**Beispiel 2.1:** Der Rohrinnendruck in einem Wasserversorgungsnetz beträgt 4 bar. Wie groß ist die Steighöhe der Wassersäule in einem Standrohr?

$$p = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad h = \frac{p}{\rho g} = \frac{4 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9,81} = 40,8 \text{ m}$$

Die aus der offiziellen Einheit Pascal abgeleitete Größe 1 bar für  $10^5 \text{ Pa}$  steht mit der Druckhöhe in folgender Beziehung

$$1 \text{ bar} = 10,20 \text{ m (WS)}$$

Der Gesamtdruck im Inneren einer Flüssigkeit mit freier Oberfläche setzt sich aus dem Atmosphärendruck und dem Druck infolge der Überdeckung mit Flüssigkeit zusammen. Der Atmosphärendruck ist der Fluiddruck der Luft, welcher wiederum abhängig ist von der überlagerten Luftsäule und damit vom Bezugsniveau. Wegen der Veränderlichkeit des Luftdruckes wurde die internationale Normatmosphäre eingeführt. Auf Meereshöhe ( $z = 0$ ) wurden hierfür bei einer Lufttemperatur von  $15^\circ\text{C}$  festgelegt die Dichte  $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$  und der Luftdruck  $p_{a,0} = 1,01325 \text{ bar} = 1013,25 \text{ mbar}$ .

Dem so festgelegten Atmosphärendruck auf Meereshöhe entspricht eine Druckhöhe von

$$h_{a,0} = \frac{p_{a,0}}{\rho g} = 10,33 \text{ m (WS)}$$

Unter der Voraussetzung einer isothermen Schichtung kann die Veränderung des Atmosphärendruckes  $p_a$  für jede beliebige Ortshöhe  $z$  nach der barometrischen Höhenformel

$$p_a = p_{a,0} \exp \left[ -\frac{\rho_0 g z}{p_{a,0}} \right] \quad (2.3)$$

berechnet werden. Wird  $p_{a,0} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  eingesetzt, so wird der Druck in der Einheit Pascal erhalten und kann in die Einheit bar umgerechnet werden.

In Tabelle 2.1 sind für verschiedene Ortshöhen der Atmosphärendruck  $p_a$  in der Einheit hPa und die zugehörigen Druckhöhen  $h_a$  angegeben.

**Tabelle 2.1:** Atmosphärendruck und Druckhöhe in Abhängigkeit von der Ortshöhe

Ortshöhe $z$ in m	0	500	1000	2000
Atmosphärendruck $p_a$ in hPa	1013,25	954,91	899,93	799,28
Druckhöhe $h_a$ in m	10,33	9,73	9,18	8,15

In der Hydraulik ist der Bezugsdruk nicht der absolute Druck, sondern der Atmosphärendruck  $p_a$ . Auf den absoluten Druck muss bezogen werden, wenn die Kompressibilität von Luft berücksichtigt werden muss. Dies ist z. B. bei Wasserspiegeländerungen in Druckbehältern mit Luftpistolen der Fall. Hier gilt das Boyle-Mariottesche Gesetz  $p \cdot V = \text{const.}$ , das allerdings nur unter der Voraussetzung konstanter Temperatur angewendet werden kann.

Bei der Kennzeichnung des Druckes im Strömungsfeld wird folgende Unterscheidung getroffen:

$p > p_a$  positiver Druck : Druck

$p < p_a$  negativer Druck: Unterdruck

Von Druck wird demnach nur gesprochen, wenn dieser den Atmosphärendruck übersteigt. Bei einem Abfall unter diesen Wert herrscht Unterdruck. Dem Absinken des Druckes sind allerdings physikalische Grenzen gesetzt. Ursache ist die begrenzte Aufnahme von Zugspannun-

gen im Innern der Flüssigkeit. Werden diese überschritten, kommt es zum Abreißen der Flüssigkeitssäule. Dabei erfolgt ein Übergang vom flüssigen zum gasförmigen Aggregatzustand.

Angaben zum temperaturabhängigen Dampfdruck  $p_d$  sind in Tab. 1.1 für die zugehörige Druckhöhe  $h_d$  zu finden. Der maximal mögliche Unterdruck (z. B. Saughöhe einer Pumpe) ist neben der Höhenlage auch noch von der Temperatur abhängig

$$\min p = -(p_a - p_d)$$

Gelöste Luft in Wasser erniedrigt diesen Wert, der bei 20°C für destilliertes Wasser in Meereshöhe  $\min h \approx -10$  m WS beträgt. Eine praktikable Größe für die minimale Druckhöhe ohne Gefahr des Abreißens der Wassersäule ist  $h \approx -7,5$  m WS. Damit wird einer Abrundung infolge des Einflusses der Meereshöhe, möglicher Temperatureinflüsse und der Zusammensetzung des Wassers (Luftgehalt, Inhaltsstoffe) Rechnung getragen.

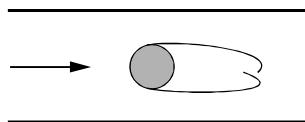
**Beispiel 2.2:** Wie weit darf die Druckhöhe absinken, damit für reines Wasser von 30°C auf einer Höhe von 1000 m beim Ansaugen durch eine Pumpe die Wassersäule nicht abreißt?

$$\text{Druckhöhe auf 1000 m Höhe : } p_a = 899,93 \text{ hPa} \quad h_a = 9,18 \text{ m}$$

$$\text{Dampfdruck bei } 30^\circ\text{C : } p_d = 42,16 \text{ hPa} \quad h_d = 0,43 \text{ m}$$

$$\text{minimale Druckhöhe : } \min h = -(h_a - h_d) = -(9,18 - 0,43) = -8,75 \text{ m}$$

Bei strömendem Wasser kann bei hohen Fließgeschwindigkeiten der Druck im Inneren der Flüssigkeit so weit abfallen, dass er die Größe des Dampfdruckes erreicht: Phasenübergang durch Wasserdampfbildung. Man spricht bei diesem Vorgang von Kavitation.

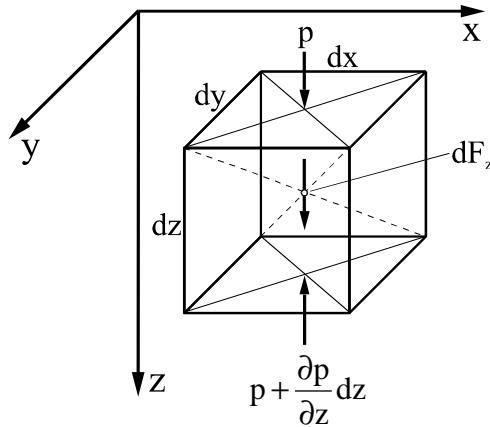


**Abb. 2.1:** Wasserdampfblase infolge Kavitation

Beim Zerfall der Wasserdampfblasen in Gebieten höheren Drucks entstehen außergewöhnlich hohe Druckspitzen, welche zu Materialzerstörung führen: Kavitationserosion.

## 2.2 Gleichgewichtsbedingungen in einer ruhenden Flüssigkeit

Zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingung wird ein infinitesimal kleiner Flüssigkeitsquader in einem kartesischen Koordinatensystem betrachtet, bei dem die z-Achse in Richtung der Erdbeschleunigung weist. Dieser Quader nach Abb. 2.2 hat die Masse  $dm = \rho dx dy dz$ .



**Abb.: 2.2:** Gleichgewichtsbedingungen

Die Druckkräfte wirken an den Quaderoberflächen. Beachtet werden muss deren Veränderung längs der vorgegebenen Richtungen. Im Schwerpunkt des Quaders wirken wegen dessen träger Masse Massenkräfte nach dem Newtonschen Grundgesetz:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_m &= \mathbf{a} dm \\ \mathbf{a} &= [a_x \ a_y \ a_z]^T \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für die Veränderung des Druckes mit der Wassertiefe wird nach dem Satz von Taylor

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \frac{\Delta z^2}{2!} + \dots$$

und für  $\lim \Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Betrachtung der Einzelkräfte für die  $z$ -Richtung:

$\downarrow$	$p dx dy$	Druckkraft
$\uparrow$	$\left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy$	Druckkraft
$\downarrow$	$dF_z = a_z \rho dx dy dz$	Massenkraft

Für das Gleichgewicht in  $z$ -Richtung wird somit:

$$p dx dy + a_z \rho dx dy dz = \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy$$

Sinngemäß gilt für die drei zu betrachtenden Richtungen

$$\begin{aligned} z - \text{Richtung} \quad \rho a_z &= \frac{\partial p}{\partial z} \\ x - \text{Richtung} \quad \rho a_x &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ y - \text{Richtung} \quad \rho a_y &= \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aus den Veränderungen in den drei vorgegebenen Richtungen folgt das totale Differential des Druckes:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

Für die Flächen gleichen Drucks wird dieses totale Differential zu Null. Somit gilt für die sog. **Niveauflächen** (= Flächen gleichen Druckes):

$$dp = 0 \quad \text{wegen} \quad p = \text{const.}$$

$$\text{und damit} \quad a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0 \quad (2.6)$$

Bei ebenen Druckfeldern entfällt die Ableitung nach einer dieser Richtungen. Man spricht dann von **Niveaulinien**.

Im Normalfall ist im Innern der Flüssigkeit lediglich die in z-Richtung wirkende Erdbeschleunigung  $g$  zu berücksichtigen. Somit gilt für die Beschleunigungen im kartesischen Koordinatensystem:

$$a_x = a_y = 0; \quad a_z = g$$

Von den drei Komponenten in Gl. 2.5 bleibt somit nur diejenige für die z-Richtung erhalten.

$$\begin{aligned} \rho g &= \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} \\ dp &= \rho g dz \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nach der Integration dieses Ausdrucks ist für die Bestimmung der Integrationskonstanten die Randbedingung am Wasserspiegel  $z = 0$  maßgebend. Wird der absolute Druck benötigt, so ist  $p = p_a$  am Ort  $z = 0$  und damit

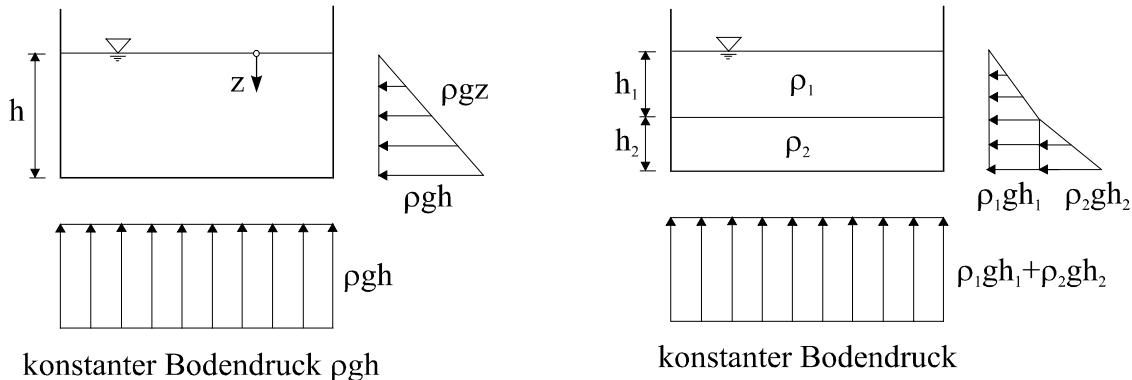
$$p = \rho g z + p_a \quad (2.8)$$

Nach Gl. 2.8 setzt sich der absolute Druck in der Tiefe  $z$  unter dem Wasserspiegel zusammen aus dem Druck infolge der Luftsäule über dem Wasserspiegel und der Druckzunahme infolge der Überdeckung mit Wasser.

Interessiert dagegen nur die relative Zunahme des Druckes, so ist für  $z = 0$  auch  $p = 0$ , somit

$$p = \rho g z \quad (2.9)$$

Zwei einfache Beispiele sollen dies verdeutlichen.



**Abb. 2.3:** Gefäß gefüllt mit Wasser der Dichte  $\rho$

**Abb. 2.4:** Gefäß gefüllt mit Flüssigk. der Dichte  $\rho_1$  und  $\rho_2$

### 2.3 Druckkraft

Die auf eine feste Oberfläche ausgeübte Druckkraft wirkt normal zur Fläche, da in der ruhenden Flüssigkeit nur Normalkräfte, nicht jedoch Scherkräfte, übertragen werden können. Die differentiellen Druckkräfte  $dF$  stehen daher immer senkrecht auf der Oberfläche  $dS$  der festen Berandung. Die Richtung des gekrümmten Flächenelements  $dS$  wird durch den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  festgelegt. An der Berandung von Behältern weist er grundsätzlich in den Bereich der Flüssigkeit. Die in Richtung der festen Berandung wirkende Druckkraft bildet daher mit der Flächennormalen einen Winkel von  $180^\circ$  und wird damit negativ. Dadurch wird berücksichtigt, dass das Innere einer Flüssigkeit einer Kompression ausgesetzt ist. Da in der Hydrostatik ausschließlich Druckkräfte von Bedeutung sind, wird dieses Vorzeichen hier nicht weiter beachtet.

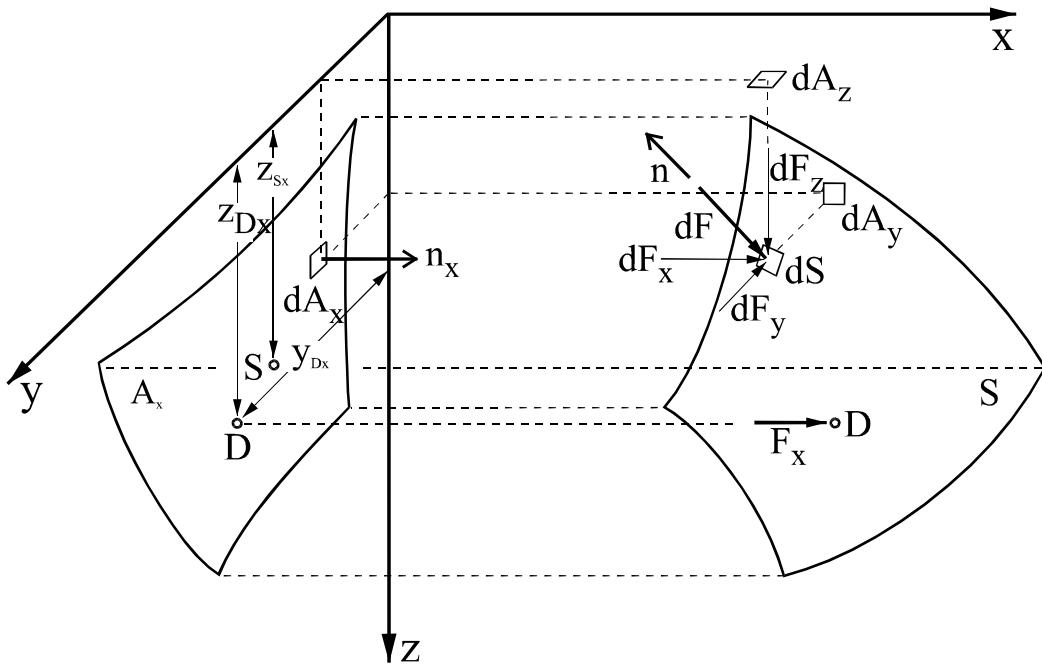
Die Druckkraft auf ein gekrümmtes Flächenelement ist  $d\mathbf{F} = p \mathbf{n} dS$  und wegen (2.9)

$$d\mathbf{F} = \rho g z \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

Im allgemeinsten Fall der Bestimmung der Druckkraft  $\mathbf{F}$  auf ein räumlich gekrümmtes Flächenelement ist wegen  $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$  die Bestimmung der Komponenten der Druckkraft über die in die Koordinatenebenen projizierten Teilflächen erforderlich, bei denen die Richtungen der Kräfte mit denen der Flächennormalen zusammenfallen.

Folgende Bezeichnungen werden verwendet (Abb. 2.5):

- $dA_x$  = Schnittfläche der Projektion des Flächenelements  $dS$  in die y-z Ebene
- $dA_y$  = Schnittfläche der Projektion des Flächenelements  $dS$  in die x-z Ebene
- $dA_z$  = Schnittfläche der Projektion des Flächenelements  $dS$  in die x-y Ebene



**Abb. 2.5:** Druckkraft auf eine beliebig gekrümmte Fläche

Im kartesischen Koordinatensystem für diese Projektionen wird dann z.B. für die x-Richtung

$$F_x = \iint_{A_x} dF_x = \rho g \iint_{A_x} z dA_x$$

mit       $\iint_{A_x} z dA_x = z_{sx} A_x$

Mit  $z_{sx}$  ist dabei der Abstand des Schwerpunktes S der Projektfläche  $A_x$  vom Wasserspiegel ( $z = 0$ ) bezeichnet.

Für die drei Komponenten gelten dann die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho g z_{sx} A_x \\ F_y &= \rho g z_{sy} A_y \\ F_z &= \rho g \iint_{A_z} z dA_z = \rho g V \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Der Betrag der resultierenden Druckkraft kann dann aus den drei Einzelkomponenten durch

$$F = \rho g \iint_S z \mathbf{n} dS = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.12)$$

berechnet werden.

Die horizontale Komponente der Druckkraft in x-Richtung  $F_x$  ist demnach gleich dem Produkt aus der Projektion der Fläche in die z-y-Ebene und dem im Flächenschwerpunkt herrschenden Druck  $\rho g z_{sx}$ . Die Vertikalkomponente ist gleich dem mit  $\rho g$  multiplizierten Volumen senkrecht über der gekrümmten Fläche bis in die Höhe des Wasserspiegels (Gewichtskraft).

Da der Druck über die Fläche nicht gleich verteilt ist, gehen die Druckkraft und ebenso ihre Komponenten nicht durch den Flächenschwerpunkt S. Die Angriffspunkte der Horizontalkomponenten  $F_x$  und  $F_y$  liegen tiefer als die jeweiligen Flächenschwerpunkte im sog. Druckmittelpunkt D. Für die Komponente  $F_x$  sind dessen Koordinaten  $z_{Dx}$  und  $y_{Dx}$ . Deren Lage wird über das statische Moment ermittelt. Es gelten

$$z_{Dx} \cdot F_x = \iint z \, dF_x \quad y_{Dx} \cdot F_x = \iint y \, dF_x$$

$$z_{Dx} = \frac{\rho g \iint z^2 \, dA_x}{\rho g z_{Sx} A_x} = \frac{I_y}{z_{Sx} A_x} \quad y_{Dx} = \frac{\rho g \iint y z \, dA_x}{\rho g z_{Sx} A_x} = \frac{I_{yz}}{z_{Sx} A_x} \quad (2.13)$$

In den Gleichungen (2.13) bedeuten  $I_y$  das Trägheitsmoment der Fläche  $A_x$  bezüglich der y-Achse,  $I_{yz}$  das Zentrifugalmoment bezüglich der Achsen y und z. Für die Komponente  $F_y$  sind in analoger Weise Beziehungen für die Koordinaten  $z_{Dy}$  und  $x_{Dy}$  abzuleiten.

Es gelten

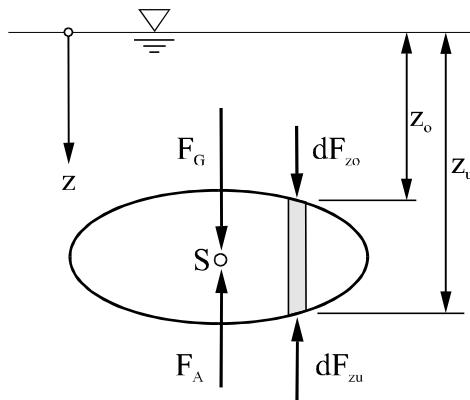
$$z_{Dy} = \frac{I_x}{z_{Sy} A_y} \quad (2.14)$$

$$x_{Dy} = \frac{I_{xz}}{z_{Sy} A_y}$$

Aus den einzelnen Komponenten kann nach Gl. (2.12) die Gesamtkraft berechnet werden.

### 2.3.1 Auftrieb

Auf einen eingetauchten Körper wirkt von allen Seiten der Wasserdruck. Während sich die Horizontalkomponenten der Druckkraft gegenseitig aufheben, resultiert aus den Vertikalkomponenten der sog. Auftrieb. Da die an der Körperoberseite angreifende Druckkraft stets geringer ist als diejenige an der Körperunterseite, entsteht eine Auftriebskraft  $F_A$ .



**Abb: 2.6:** Auftrieb auf einen eingetauchten Körper

Während in ruhendem Wasser die Richtung der Auftriebskraft entgegen der Richtung der Erdbeschleunigung vorgegeben ist, sind bei bewegtem Wasser mit freier Oberfläche auch für

die Auftriebwirkung die Niveaumassen maßgebend, welche in der Regel nicht waagrecht verlaufen.

Ganz allgemein gilt für einen eingetauchten Körper

$$dF_A = dF_{zu} - dF_{zo} = \rho g z dA_z$$

mit  $z_o - z_u = z$ , und  $dA_z$  als zugehörige Projektionsfläche eines infinitesimal schmalen Streifens.

Der Gesamtauftrieb des Körpers ist somit

$$F_A = F_z = \rho g \iint_S z \mathbf{n} dS = \rho g V \quad (2.15)$$

Je nach dem Verhältnis  $F_A/F_G$  sinkt, schwiegt oder steigt der Körper.

Die Auftriebwirkung ist auch für die Ermittlung der Druckkraft auf eine beliebig geformte Berandung von Bedeutung. In Abb. 2.7 ist ein waagrecht liegender Körper mit Rechteckquerschnitt eingezeichnet.

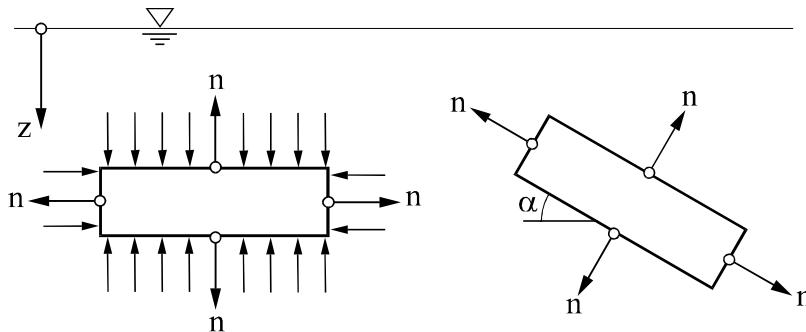


Abb. 2.7: Auftrieb bei einem waagrecht und geneigt angeordneten Rechteckquerschnitt

An seiner Unterseite wirkt nach den vorstehenden Erläuterungen ein höherer Auftrieb als die Auflast an seiner Oberseite. Die Horizontalkräfte aus dem Druck auf die vertikale Berandung heben sich gegenseitig auf. Der Auftrieb bleibt gleich, wenn der Körper leicht verdreht wird, da sich hierbei sein Volumen nicht ändert. Maßgebend sind hierbei wieder die Vertikalkomponenten der Druckkräfte auf alle vier Begrenzungsflächen.

Die Abhängigkeit der Auftrieb- bzw. Auflastwirkung von der Orientierung der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  ist in Abb. 2.8 am Beispiel eines eingetauchten Zylinders mit Kreisprofil demonstriert.

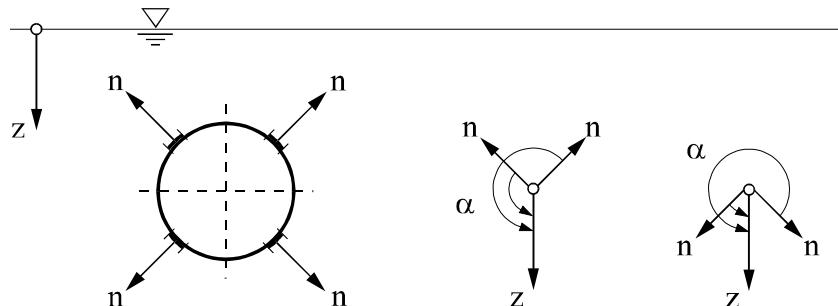


Abb. 2.8: Auftrieb beim Kreisquerschnitt

Hierbei ist ein Winkel  $\alpha$  als der von der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  mit der positiven z-Achse eingeschlossene Winkel definiert. An der Oberfläche des Körpers ist eine Auflast wirksam, wenn

$$\alpha = 180^\circ \pm 90^\circ$$

beträgt. Der Körper erfährt über seine Berandung einen Auftrieb, wenn für

$$\alpha = (360) 0^\circ \pm 90^\circ$$

anzusetzen ist. An der vorgegebenen Geometrie ist leicht nachzuvollziehen, dass die Auflastwirkung die Zylinderoberseite, die Auftriebwirkung die Zylinderunterseite erfasst.

### 2.3.2 Druckkraft auf die ebene Wand

Betrachtet wird der allgemeine Fall einer um den Winkel  $\varepsilon$  gegen die Horizontale geneigten Wand. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie für beliebige Winkel  $\varepsilon$  allgemeingültige Aussagen liefert und so z. B. auch den Sonderfall der senkrechten Wand für  $\varepsilon = 90^\circ$  mit abdeckt. Nach Gl. 2.12 ist  $\mathbf{F} = \rho g \iint z \mathbf{n} dA$ . Da bei der ebenen Wand die Richtung der Druckkraft bekannt ist, werden nur noch die Beträge bestimmt. Demnach ist  $F = \rho g z_s A$ .

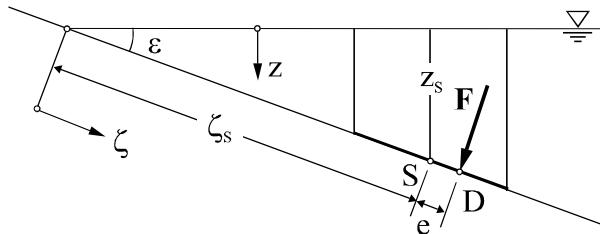


Abb. 2.9: Druckkraft auf eine geneigte Wand

Dies entspricht dem Gewicht der Flüssigkeitssäule mit der Grundfläche  $A$  und dem lotrechten Abstand  $z_s$  ihres Schwerpunktes von der Oberfläche als Höhe. Nach Gl. 2.13 gilt für den Druckmittelpunkt

$$\zeta_D = \frac{\int \zeta^2 dA}{\int \zeta dA} = \frac{I}{\zeta_s A}$$

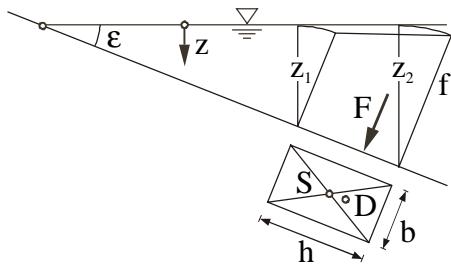
Nach dem Satz von Steiner ist  $I = I_s + \zeta_s^2 A$  und demnach

$$\zeta_D = \zeta_s + \frac{I_s}{\zeta_s A} = \zeta_s + e$$

Für den Abstand zwischen Flächenschwerpunkt und Druckmittelpunkt gilt daher

$$e = \frac{I_s}{\zeta_s A} \quad (2.16)$$

**Beispiel 2.3:** Druckkraft auf eine Rechteckfläche mit  $A = b \cdot h$  entsprechend Abb. 2.10



**Abb. 2.10:** Druckkraft auf eine Rechteckfläche in einer geneigten Wand

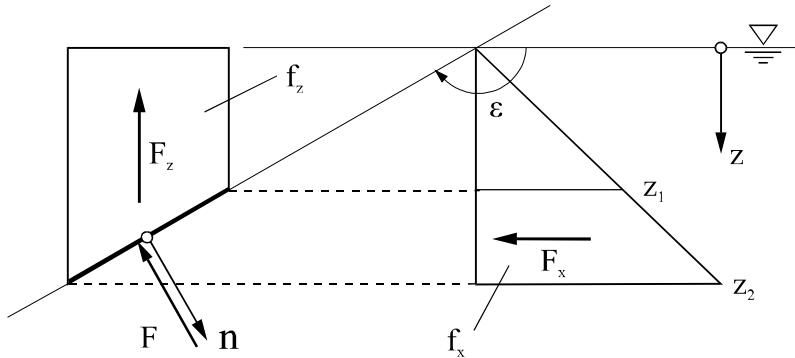
Nach Gl. (2.11) ist

$$F = \rho g z_S b h = \rho g b \frac{1}{2} (z_1 + z_2) h = \rho g b f$$

Mit  $f$  ist in Abb. 2.10 die sog. Druckfigur bezeichnet. Für das Beispiel ist  $f = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)h$

Der Abstand zwischen S und Druckmittelpunkt D ist

$$e = \frac{I_s}{\zeta_s A} = \frac{bh^3}{12\zeta_s bh} = \frac{h^2}{12\zeta_s}$$



**Abb. 2.11:** Druckfiguren bei Auftriebwirkung

Besondere Bedeutung kommt dem Sonderfall der geneigten Wand zu, bei welchem  $\epsilon > 90^\circ$  beträgt. Für den unter Ziff. 2.3.1 definierten Winkel  $\alpha$  gilt hier  $\alpha < 90^\circ$ . Auch hier steht die resultierende Druckkraft  $F$  senkrecht auf der Berandung und weist somit eine vertikal nach oben gerichtete Komponente  $F_z$  auf. Damit wird die Auftriebwirkung angedeutet.

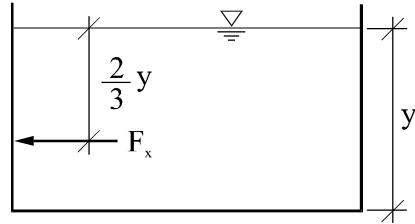
Die Komponenten der Druckkraft  $F_x$  und  $F_z$  werden hier zweckmäßigerweise über die Druckfiguren bestimmt (Abb. 2.11). Die Projektionen der Höhe  $h$  der Fläche in die  $z$ - und  $x$ -Ebene sind hierbei  $h \sin(180^\circ - \epsilon)$  und  $h \cos(180^\circ - \epsilon)$ . Multipliziert mit dem Schwerpunktabstand  $z_s = 0,5(z_1 + z_2)$  werden erhalten

$$f_x = z_s h \sin(180^\circ - \epsilon)$$

$$f_z = z_s h \cos(180^\circ - \epsilon)$$

Bei der senkrechten Wand ist  $\epsilon = 90^\circ$  und damit  $\sin \epsilon = 1,0$ . Dieser Fall ist nicht nur für die Berechnung der Belastung auf Behälterwände wichtig. Er stellt gleichzeitig auch einen Querschnitt durch ein künstliches Gerinne mit Rechteckquerschnitt dar. Die nachstehenden For-

meln beschreiben demnach auch die Belastung der Gerinnewand. Von Bedeutung ist auch der Angriffspunkt der Druckkraft auf die Seitenwand, der im Abstand von zwei Dritteln der Wassertiefe von der Wasseroberfläche erfolgt.



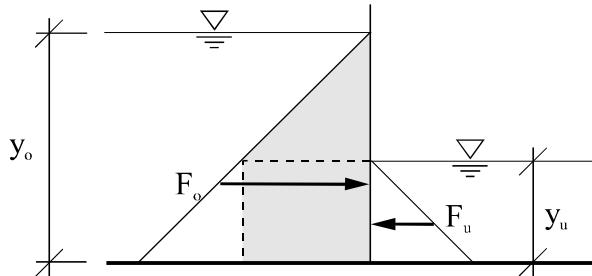
**Abb. 2.12:** Druckkraft auf eine Gerinnewand

$$F = \rho g z_s b y \quad \text{mit} \quad z_s = \frac{y}{2}$$

$$F = \rho g \frac{by^2}{2}$$

$$z_D = z_s + \frac{I}{z_s A_y} = \frac{y}{2} + \frac{2 by^3}{12 yyb} = \frac{y}{2} + \frac{y}{6} = \frac{2}{3} y$$

**Beispiel 2.4:** Kraftwirkung auf eine Wand nach Abb. 2.13, die auf beiden Seiten eingestaut ist. In diesem Fall ist die resultierende Druckkraft zu bestimmen.



**Abb. 2.13:** Druckkräfte auf eine Stauwand

$$F = F_o - F_u = \frac{1}{2} \rho g b (y_o^2 - y_u^2)$$

Angriffspunkt der resultierenden Druckkraft von der Sohle  $y_D$  oder vom Wasserspiegel  $z_D$  über Momentenansatz.

### 2.3.3 Druckkraft auf einfach gekrümmte Flächen

Für die resultierende Druckkraft ganz allgemein ist auch hier Gl. (2.12)

$$\mathbf{F} = \rho g \iint_A z \mathbf{n} dA \quad (2.12)$$

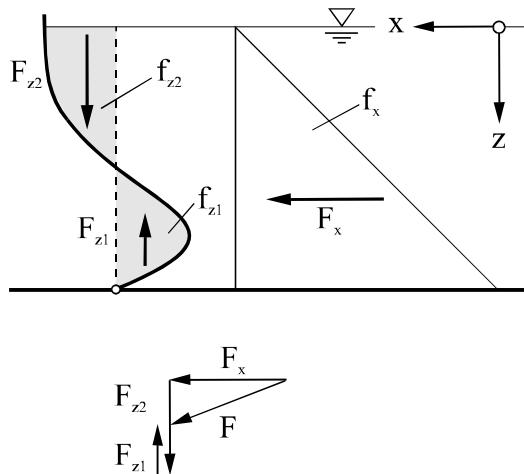
anzuwenden. Im Sonderfall der einfach gekrümmten Fläche bleibt die Betrachtung auf die y-Ebene mit den Koordinaten z und x beschränkt. Es sind daher nur die Komponenten  $F_x$  und  $F_z$  zu bestimmen, die nach Gl. (2.11) definiert sind

$$F_x = \rho g \iint z dA_x = \rho g z_s A_x$$

$$F_z = \rho g \iint z dA_z = \rho g V$$

Zweckmäßigerweise werden die Komponenten der Druckkraft über die Druckfiguren bestimmt (Abb. 2.14). Bei der x-Komponente ist diese unabhängig von der Gestalt der betrachteten Wand. Für die Breite b ist

$$F_x = \rho g b \int z dz = \rho g b f_x = \rho g b \frac{h^2}{2}$$



**Abb. 2.14:** Resultierende Druckkraft auf eine einfach gekrümmte Fläche

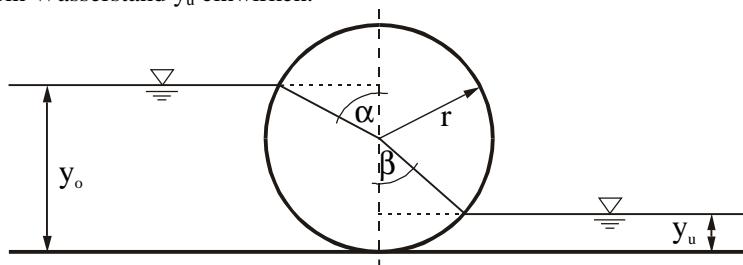
Bei der z-Komponente sind wasserseitige Auflast- und luftseitige Auftriebskräfte gegeneinander aufzuaddieren. Hierbei spielt der Fußpunkt der Wand eine besondere Rolle. Die zugehörigen Druckfiguren  $f_z = \int z dx$  sind gegebenenfalls planimetrisch zu ermitteln.

$$\text{Auflast : } \downarrow F_{z2} = \rho g b f_{z2}$$

$$\text{Auftrieb : } \uparrow F_{z1} = \rho g b f_{z1}$$

$$\text{Gesamtdruckkraft: } F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

**Beispiel 2.5:** Druckkraft auf ein Walzenwehr vom Radius r (Abb. 2.15), auf welches oberstrom ein Wasserstand  $y_o$ , unterstrom ein Wasserstand  $y_u$  einwirken.



**Abb.: 2.15:** Walzenwehr

Die für die Ermittlung der Komponenten der Wasserdrukraft benötigten resultierenden Druckfiguren sind aus Abb. 2.16 zu ersehen. Im einzelnen sind bei einer Breite b des Walzenwehrs

Horizontalkomponenten  $F_{ix}$ :

$$F_x = \rho g b f_x = \rho g b \frac{1}{2} (y_0^2 - y_u^2)$$

Vertikalkomponente  $F_z$ :

$$F_z = \rho g b f z = \rho g b (f_{z1} + f_{z2})$$

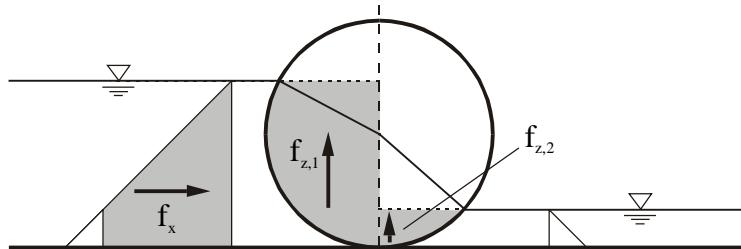


Abb. 2.16: Druckfiguren

$$f_{z1} = \frac{\pi r^2 (180 - \alpha)}{360} + \frac{1}{2} (y_0 - r) r \sin \alpha$$

$$f_{z2} = \frac{\pi r^2 \beta}{360} - \frac{1}{2} (r - y_u) r \sin \beta$$

Die oberstrom wirkende Auflast infolge  $y_0 > r$  wird durch eine gleichgroße Auftriebswirkung im entsprechenden Bereich angeglichen. Die Wirkungslinie der resultierenden Wasserdrukraft F geht durch den Walzenmittelpunkt.

## 2.4 Schwimmfähigkeit von Körpern

Bei der Untersuchung der Schwimmfähigkeit muss der Nachweis erbracht werden, dass für den Gleichgewichtszustand, bei dem die Auftriebskraft  $F_A$  die Gewichtskraft  $F_G$  ausgleicht, ein ausreichendes Freibordmaß  $f$  des schwimmenden Körpers vorhanden ist. Der Anteil des Körpers, welcher sich infolge der Gewichtskraft unter Wasser befindet, wird durch die Eintauchtiefe  $s$  gekennzeichnet. In Abb. 2.17 ist ein schwimmender Körper dargestellt, der unter dem Eigengewicht eine gewisse Eintauchtiefe aufweist.

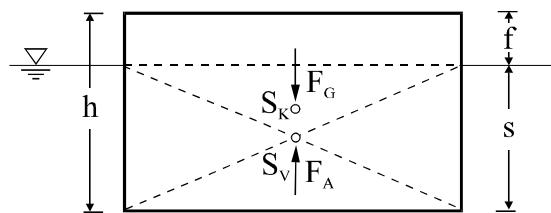


Abb. 2.17: Schwimmender Vollkörper mit  $\rho_K < \rho$

Für diesen Körper errechnet sich das Körnergewicht über das Körpervolumen  $V_K$  und die Dichte  $\rho_K$  zu  $F_G = \rho_K g V_K$ . Bei der Bestimmung des Auftriebs muss von dem verdrängten Wasservolumen  $V_V$  ausgegangen werden. Die Auftriebskraft ist dann  $F_A = \rho \cdot g \cdot V_V$ . Aus diesen beiden Beziehungen können unter Verwendung der Bezeichnungen in Abb. 2.17 die Eintauchtiefe  $s$  und des Freibordmaßes  $f$  bestimmt werden. Für den Vollkörper muss für die Dichten  $\rho_K < \rho$  gelten. Für die einzelnen Volumenanteile gilt dann wegen der Gleichgewichtsbedingung

$$\rho_K g V_K = \rho_K g (V_v + V_f) = \rho g V_v$$

Daraus kann dann für das durch das Freibord eingenommene Volumen  $V_f$  die Beziehung

$$V_f = \left( \frac{\rho}{\rho_K} - 1 \right) V_v \quad (2.18)$$

abgeleitet werden.

Für einen Körper mit einer rechteckigen Grundfläche  $A$  wird entsprechend Gl. (2.18)

$$f \cdot A = \left( \frac{\rho}{\rho_K} - 1 \right) \cdot s \cdot A$$

Weiterhin gelten die Beziehungen

$$f + s = h = \frac{\rho}{\rho_K} s \rightarrow s = \frac{\rho_K}{\rho} h$$

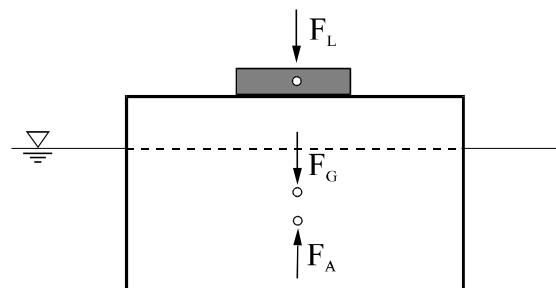
$$f = h \left( 1 - \frac{\rho_K}{\rho} \right) \quad (2.19)$$

Weist das Material des im Wasser befindlichen Körpers eine höhere Dichte als das Wasser auf, so muss wegen  $\rho_K > \rho$  für die Volumen  $V_v > V_K$  sein. Diese Bedingung ist nur für einen Hohlkörper zu erfüllen.

Wird ein schwimmender Körper mit  $\rho_K < \rho$  zusätzlich durch ein zu transportierendes Gewicht  $F_L$  belastet (Abb. 2.18), dann muss dies in der Gleichgewichtsbedingung berücksichtigt werden. Es gilt dann

$$F_G + F_L = F_A$$

Durch das Einsetzen der zugehörigen Volumina wird dann



**Abb. 2.18:** Schwimmender Körper mit Auflast

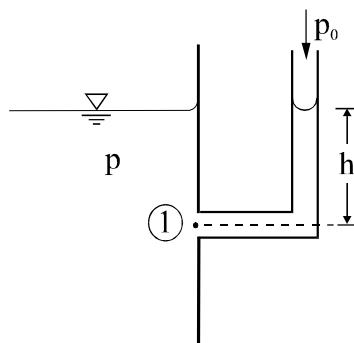
$$\rho_K g (V_v + V_f) + F_L = \rho g V_v$$

$$V_f = \left( \frac{\rho}{\rho_K} - 1 \right) V_v - \frac{F_L}{\rho_K g} \quad (2.20)$$

Neben dem Schwimmvermögen muss auch die Stabilität schwimmender Körper untersucht werden. Bei der Konstruktion ist darauf zu achten, dass der Körperschwerpunkt unter dem Schwerpunkt des verdrängten Volumens liegt. Die Schwimmlage ist stabil, wenn bei einer Auslenkung ein rückstellendes Moment zwischen der im Verdrängungsschwerpunkt angreifenden Auftriebskraft und der im Körperschwerpunkt anzusetzenden Gewichtskraft entsteht.

## 2.5 Flüssigkeitsmanometer

Früher wurde das Flüssigkeitsmanometer in der Versuchstechnik häufig eingesetzt zur Druckmessung. Die nachstehend angeführten Beispiele dienen dem Verständnis der Hydrostatik. Nach dem Prinzip der kommunizierende Rohre arbeitet die Schlauchwaage.



**Abb.: 2.19:** Standrohr

Der einfachste Fall eines Flüssigkeitsmanometers (Abb. 2.19) ist die Druckbohrung an einem Behälter, an welche ein Standrohr (Piezometerrohr) angeschlossen wird. Das Fluid in Behälter und Standrohr ist Wasser. Es ist

$$p_1 = \rho g h_1$$

Damit erfolgt die Druckmessung direkt über den Flüssigkeitsstand.

Im Piezometerrohr ist eine Sperrflüssigkeit der Dichte  $\rho_s$  (Abb. 2.20). Bezuglich der Niveaufläche I-I gilt

$$p_I = p_1 + \rho g h_1 = \rho_s g \Delta h$$

Werden die beiden Dichten beachtet, so wird

$$p_1 = g (\rho_s \Delta h - \rho h_1)$$

Für  $\rho \ll \rho_s$  z. B. bei Quecksilber, ist dann

$$p_1 = \rho_s g \Delta h$$

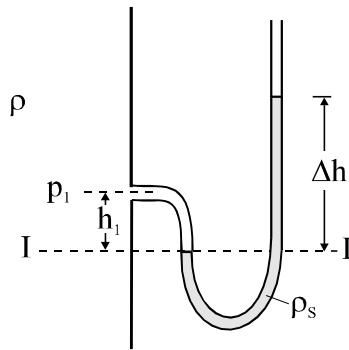


Abb. 2.20: Standrohr mit Sperrflüssigkeit

Messung eines Druckunterschiedes zwischen zwei Druckbohrungen in einer Rohrleitung mit Hilfe einer Sperrflüssigkeit  $\rho_s > \rho$  (Abb. 2.21):

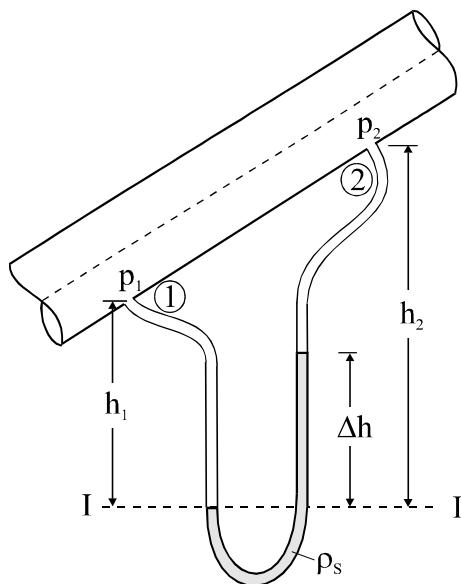


Abb. 2.21: Differenzdruckmessung

Für die Niveaulinie I - I gilt

$$p_1 = p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g (h_2 - \Delta h) + \rho_s g \Delta h$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \rho g (h_2 - h_1 - \Delta h) + \rho_s g \Delta h$$

Im horizontalen Rohr ist  $h_1 = h_2$ , demnach gilt

$$\Delta p = g \Delta h (\rho_s - \rho)$$

## 2.6 Spiegellagen in bewegten Gefäßen

Durch die Berandung wird ein Ausfließen verhindert, so dass auf die träge Masse zusätzlich zur Erdbeschleunigung weitere Beschleunigungen ausgeübt werden können. Die Auslenkungen der freien Oberfläche werden dabei immer im Gleichgewichtszustand unter der Einwir-

kung konstanter Beschleunigung betrachtet. In diesen Fällen ist das Wasser innerhalb des Gefäßes wieder in relativer Ruhe. Die Spiegellage der Oberfläche entspricht immer der Niveauläche mit  $p = p_a$ . Allgemein gilt nach Gl. (2.5)

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0$$

Werden außer der Erdbeschleunigung  $a_z = g$  Zusatzbeschleunigungen ausgeübt, so verformt sich die zunächst horizontale Oberfläche.

Bei der Betrachtung der Kraftwirkung im bewegten, beschleunigten Bezugssystem gilt grundsätzlich, dass sich für den bewegten Beobachter ein dynamisches Gleichgewicht zwischen der Antriebskraft  $\mathbf{F}$  und der Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  einstellt (d'Alembertsches Prinzip):

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_T = 0 \quad \mathbf{F} + m\mathbf{a} = 0$$

Die Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  ist der Antriebskraft entgegengerichtet, gleiches gilt auch für die Beschleunigungen.

### 2.6.1 Anfahrbeschleunigung

Die Beachtung der Anfahrbeschleunigung ist nicht nur beim Schrägaufzug der Schiffshebewerke von Bedeutung, in jedem Tankfahrzeug sind Vorkehrungen für die Relativbewegung des transportierten Fluids zu treffen. Hier wird der allgemeine Fall der Beschleunigung auf einer schießen Ebene behandelt. Die Fahrzeugbeschleunigung  $\mathbf{a}$  wird in die  $x$ - und  $z$ -Komponente aufgeteilt (Abb. 2.22). Durch Überlagerung mit der Erdbeschleunigung kann die resultierende Beschleunigung ermittelt werden. Die sich einstellende freie Oberfläche steht dann senkrecht zur Richtung der resultierenden Beschleunigung.

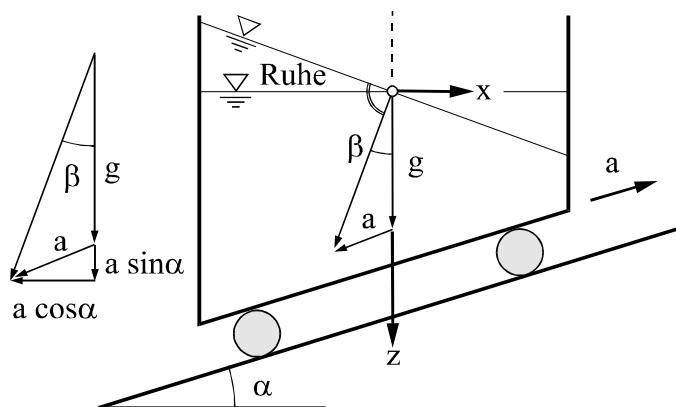


Abb.: 2.22: Geradlinige Beschleunigung

Fahrzeugbeschleunigung  $\mathbf{a}$ , somit

$$\frac{a_z}{a} = \sin \alpha$$

$$\frac{a_x}{a} = \cos \alpha$$

Beschleunigung durch das Auftreten der Trägheitskraft

$$\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$$

Die Komponenten der Beschleunigungen sind

$$a_x = -a \cos \alpha$$

$$a_z = g + a \sin \alpha$$

Die Gleichung für die Niveaufläche ist somit wegen

$$a_x dx + a_z dz = 0$$

$$-a \cos \alpha dx + (g + a \sin \alpha) dz = 0$$

Durch Integration wird daraus

$$a \cos \alpha x = (g + a \sin \alpha) z + C,$$

wobei C durch die Randbedingungen zu bestimmen ist. Da der Koordinatenursprung in Fahrzeugmitte liegt, aus Kontinuitätsgründen demnach an diesem Punkt keine Auslenkung des Wasserspiegels erfolgt, gilt für diese Randbedingungen  $x = 0; z = 0$  und somit  $C = 0$ .

Der Neigungswinkel  $\beta$  gegen die Horizontale kann dann über das Verhältnis  $a_x/a_z$  zu

$$\tan \beta = a \cos \alpha / (g + a \sin \alpha) \quad (2.15)$$

berechnet werden. Die Druckverteilung in der Vertikalen wird durch die Beschleunigung  $a_z$  über  $p = \rho(g + a \sin \alpha)z$  bestimmt. Bei einer reinen Horizontalbeschleunigung ( $\alpha = 0$ ) kommt es daher wohl zu einer Verkipfung des Wasserspiegels, nicht dagegen zu einer Beeinflussung der hydrostatischen Druckverteilung in der Senkrechten.

## 2.6.2 Rotation eines flüssigkeitsgefüllten Zylinders

Beim rotierenden Gefäß ist das Zusammenwirken von Erdbeschleunigung und der von der Entfernung von der Drehachse abhängigen Zentripetalbeschleunigung besonders gut zu beobachten. Auch hier ist die Oberfläche wiederum eine Niveaufläche. Wegen der Rotation des Gefäßes um die z-Achse werden für die Beschreibung zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten mit r, φ, und z gewählt. Für den betrachteten Zustand sind im rotierenden Gefäß die einzelnen Wasserteilchen gegenüber der umgebenden Berandung in Ruhe.

Bei der Drehung des Gefäßes mit einer konstanten Umfangsgeschwindigkeit muss jedes Flüssigkeitsteilchen nach innen beschleunigt werden (Zentripetalbeschleunigung), da es sich sonst unter der Wirkung der als Fliehkraft wirkenden Trägheitskraft nach außen bewegen würde. Es wirken ein die von der Umfangsgeschwindigkeit  $v_\phi$  abhängige radiale Beschleunigung  $a_r$  und die in z-Richtung vorhandene Erdbeschleunigung  $a_z = g$  (Abb. 2.23). Die Gleichung für die Niveaufläche ist somit:

$$a_r dr + a_z dz = 0$$

Die infolge der Trägheitskraft wirkende Fliehbeschleunigung kann mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  oder durch die Umfangsgeschwindigkeit  $v_\phi$  dargestellt werden. Für die Win-

kelgeschwindigkeit ist  $\omega = \dot{\phi} = d\phi / dt = \text{const}$ . Die Umfangsgeschwindigkeit ist mit der Winkelgeschwindigkeit über die Beziehung  $v_\phi = \omega r$  verknüpft. Die Fliehbeschleunigung ist dann durch  $a_r = \omega^2 r = v_\phi^2 / r$  gegeben. Für die Niveaufläche gilt somit  $\omega^2 r dr + gdz = 0$ .

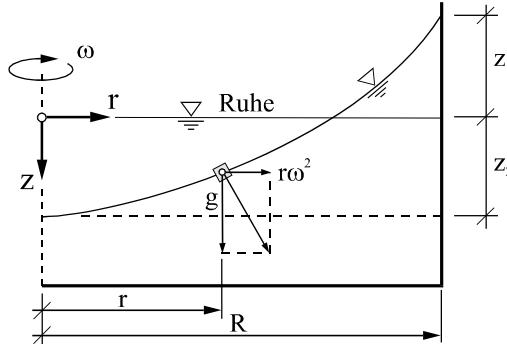


Abb.: 2.23: Flüssigkeit in einem rotierenden Behälter

Nach der Integration ist  $(r^2/2) \omega^2 = -gz + C$ , woraus wegen  $z = z_2$  für  $r = 0$

$$z = z_2 - \frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad (2.16)$$

und unter Beachtung der weiteren Randbedingung, dass für  $r = R$  für die Spiegellage  $z = -z_1$  mit

$$-z_1 = z_2 - \frac{R^2 \omega^2}{2g}$$

ein Ausdruck für den Unterschied  $\Delta h$  des Wasserspiegels zwischen der Achse und dem Behälterrands

$$\Delta h = z_2 - (-z_1) = \frac{R^2 \omega^2}{2g}$$

folgt. Gl. 2.16 stellt eine Parabel dar. Die Niveauflächen im rotierenden Gefäß sind deshalb Rotationsparaboloide, welche im Innern des Fluids parallel zur Oberfläche verlaufen. Der Neigungswinkel  $\beta$  der Niveaulinie gegenüber der Senkrechten ist an jedem Punkt durch das Verhältnis der beiden Beschleunigungen

$$\tan \beta = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{v_\phi^2}{r g}$$

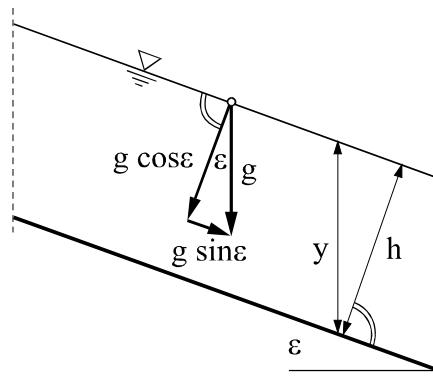
Bei bewegten Flüssigkeiten, z. B. in einem Fluss, wirkt in Krümmungen auf jedes Wasserteilchen auch die Fliehraft, die sich dann einstellenden Niveaulinien werden allerdings von anderen Gesetzmäßigkeiten geprägt.

## 2.7 Druckverteilung in Fließgewässern

Wegen der unregelmäßig verlaufenden Sohle bei natürlichen Gerinnen wird die Wassertiefe  $y$  in der Vertikalen gemessen. Die manchmal zu findende Angabe der Wassertiefe  $h$  senkrecht zur Sohle ist nur bei künstlichen Gerinnen sinnvoll. Der Abfluss in offenen Gerinnen ist ver-

bunden mit einem Wasserspiegelgefälle in Fließrichtung. Da der Wasserspiegel zugleich die Niveaulinie mit dem Überdruck Null verkörpert, sind im Fließgewässer die Niveaulinien parallel zum Wasserspiegel. Da Niveaulinien immer senkrecht zu den wirksamen Beschleunigungen verlaufen, ist hier eine Erklärung für diese Erscheinung angebracht.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit längs des Gerinnes konstant. Im Gleichgewichtszustand zwischen Antriebs- und Widerstandskräften wird dabei der Anteil  $g \sin \varepsilon$  der Erdbeschleunigung zur Aufrechterhaltung der Fließbewegung benötigt. Die resultierende Beschleunigung  $g \cos \varepsilon$  steht demnach senkrecht zur Niveaulinie der freien Oberfläche.



**Abb. 2.24:** Sohlendruck im Fließgewässer

Die Druckhöhe an der Gerinnesohle wird nach der Abb. 2.24 bei der Wassertiefe  $y$  durch

$$\frac{p}{\rho g} = h \cos \varepsilon = y \cos^2 \varepsilon \quad (2.17)$$

bestimmt.

## Formelzeichen zu Kapitel 2

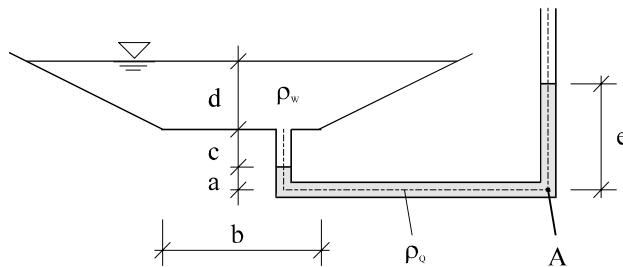
Zeichen	Benennung	Einheit
<b>a</b>	Beschleunigung	$\text{m}/\text{s}^2$
<b>A</b>	Schnittfläche	$\text{m}^2$
<b>A<sub>x</sub></b>	Projektion einer Fläche in die x-Ebene	$\text{m}^2$
<b>A<sub>y</sub></b>	Projektion einer Fläche in die y-Ebene	$\text{m}^2$
<b>b</b>	Breite	m
<b>e</b>	Abstand Flächenschwerpkt. - Angriffspkt Druckkraft	m
<b>F</b>	Kraft	N
<b>f</b>	Druckfigur, Freibordmaß	$\text{m}^2$ m
<b>g</b>	Erdbeschleunigung	$\text{m}/\text{s}^2$
<b>h</b>	Druckhöhe	m
<b>I</b>	Trägheitsmoment	$\text{m}^4$
<b>m</b>	Masse	kg
<b>n</b>	Normalenrichtung	-
<b>p</b>	Flüssigkeitsdruck	Pa
<b>p<sub>a</sub></b>	Atmosphärendruck	Pa
<b>p<sub>d</sub></b>	Dampfdruck	Pa
<b>r</b>	Radius	m
<b>s</b>	Eintauchtiefe	m
<b>S</b>	Oberfläche	$\text{m}^2$
<b>V</b>	Volumen	$\text{m}^3$
<b>x, y, z</b>	kartesische Koordinaten	m
<b>z<sub>S</sub></b>	Abstand Flächenschwerpkt.- Oberfläche	m
<b>z<sub>D</sub></b>	Abstand Druckangriffspkt.- Oberfläche	m
<b>α, β</b>	Neigungswinkel	-
<b>ε</b>	Neigungswinkel einer schrägen Fläche gegen die Wasseroberfläche	-
<b>ρ</b>	Dichte	$\text{kg}/\text{m}^3$
<b>ρ<sub>o</sub></b>	Dichte der Normatmosphäre auf Meereshöhe	$\text{kg}/\text{m}^3$
<b>ω</b>	Winkelgeschwindigkeit	1/s

**Aufgabe 2.1**

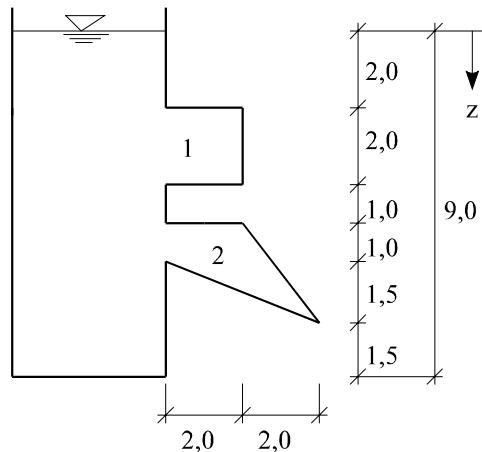
Was versteht man unter Kavitation und wie wird diese durch die Temperatur beeinflusst?

**Aufgabe 2.2**

Das dargestellte Gefäß ist mit Wasser gefüllt. Ein Rohr, das am Gefäßboden angeschweißt ist und das in der skizzierten Art mit Quecksilber gefüllt ist, stellt eine Verbindung zur Außenluft her.

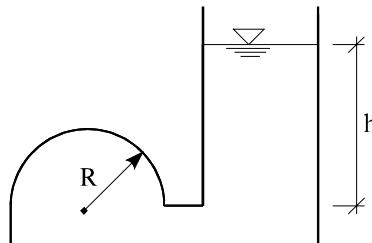


- Wie hoch ist der Quecksilberstand  $e$  in m?
- Wie hoch ist der Druck im Punkt A?
- Geben Sie diesen Druck in folgenden Einheiten an: kN/m<sup>2</sup>, Pa, mWs, mHg, bar  
 $a = 0,5 \text{ m}$        $d = 1,0 \text{ m}$   
 $b = 1,0 \text{ m}$        $\rho_w/\rho_Q = 1/13,5$   
 $c = 0,4 \text{ m}$

**Aufgabe 2.3**

Das dargestellte Becken enthält die beiden Aussparungen 1 und 2 und ist mit Wasser gefüllt.

- Stellen Sie die Verteilung des horizontalen Wasserdrucks auf die rechte Wand dar.
- Welche Horizontalkraft in kN/m ergibt sich aus dieser Druckverteilung und in welcher Höhe z greift sie an?

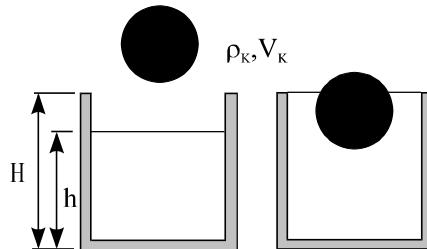
**Aufgabe 2.4**

Eine mit Flüssigkeit gefüllte Halbkugel ist über ein Rohr mit einem oben offenen Gefäß verbunden, dessen Wasserspiegel um die Höhe  $h$  dem Grundkreis der Halbkugel liegt.

Wie groß ist die vertikale Druckkraft auf die Innenfläche der Halbkugel?

**Aufgabe 2.5**

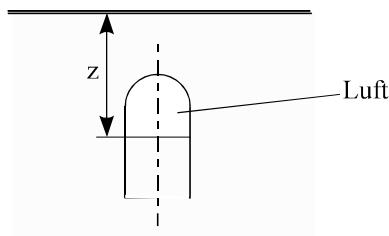
Ein mit Wasser gefülltes Gefäß steht auf einer Waage. Wie ändert sich die Anzeige, wenn man einen Finger in das Wasser eintaucht?

**Aufgabe 2.6**

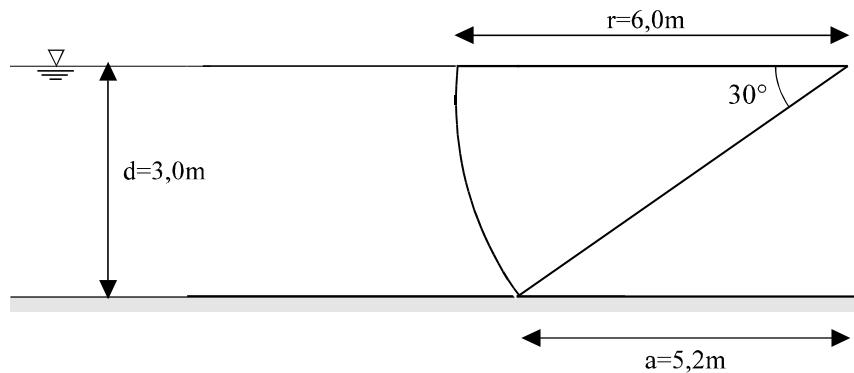
Ein zylindrisches Gefäß (Grundfläche  $A$ , Höhe  $H$ ) ist bis zur Höhe  $h$  mit Flüssigkeit der Dichte  $\rho_F$  gefüllt. Welches Volumen  $V_K$  darf ein auf die Flüssigkeit gesetzter Körper der Dichte  $\rho_K < \rho_F$  höchstens haben, damit das Gefäß nicht überläuft?

**Aufgabe 2.7**

Cartesianischer Taucher: Ein nach unten offener Hohlkörper (z. B. ein Reagenzglas) mit dem Leergewicht  $G$  wird in Wasser (Dichte  $\rho_w$ ) eingetaucht. In dem Hohlkörper ist eine Luftmenge (Masse  $m$ ) eingeschlossen, durch deren Auftrieb der Hohlkörper in der Wassertiefe  $z$  schwimmt. Der äußere Luftdruck  $p_0$  und die konstant bleibende Temperatur  $T$  der eingeschlossenen Luftpumpe seien bekannt.



- Welche Bedingung muss zwischen diesen Größen erfüllt sein, damit der Taucher in der Wassertiefe  $z$  im Gleichgewicht ist?
- Ist das Gleichgewicht stabil gegen eine Änderung der Wassertiefe?

**Aufgabe 2.8**

- Zeichnen Sie bei dem dargestellten Kreis-Segmentschütz die Druckfiguren für die vertikale und horizontale Kraftkomponente, sowie die resultierende Druckfigur direkt am Schütz.
- Welche Größe hat die aus der Wasserbelastung resultierende Kraft pro lfd m.?
- Wie groß ist das sich aus der Wasserbelastung ergebende Moment, wenn das Drehlager im Kreismittelpunkt liegt?

## 3 Kinematik der Flüssigkeiten

Kinematik ist die Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten ohne Berücksichtigung von Kräften.

### 3.1 Betrachtungen im Strömungsfeld

Für die Anwendungen im Bereich des Bauingenieurwesens sind außerordentliche Unterschiede in der Ausdehnung des zu betrachtenden Strömungsfeldes zu beachten. Als **Strömungsfeld** wird für diese Anwendungen der jeweils von der Flüssigkeit eingenommene Raum bezeichnet. Im Falle eines Sees ist dies demnach das gesamte Wasservolumen zwischen der Seeoberfläche und dem Seegrund, im Grundwasserleiter die komplexe von der Flüssigkeit gefüllte Porenstruktur innerhalb der Gesteinsmatrix. Die Behandlung der Strömung unter diesen variablen Bedingungen setzt voraus, dass die Anwendung entsprechender Rechenregeln den Abmessungen des jeweiligen Strömungsfeldes gerecht werden. Ein **Flüssigkeitsteilchen** mit dem Volumen  $V$  wird demnach so definiert, dass seine Abmessungen klein sind im Vergleich zum zu beschreibenden Strömungsfeld. Gleichzeitig muss diese Abmessung noch groß sein im Vergleich zum Molekülabstand. Selbst für eine Porenabmessung als Beispiel für die untere Grenze eines Strömungsfeldes in der Größenordnung von  $0,1 \text{ mm}$ , also  $10^{-4} \text{ m}$ , wird dies offensichtlich erfüllt, da das Verhältnis dieser Größe zum Molekülabstand (s. Kap. 1) immer noch im Bereich von  $10^4$  liegt.

Wird die Geschwindigkeit dieses Flüssigkeitsteilchens betrachtet, so sind davon alle Moleküle innerhalb seines Volumens erfasst. Bei der Ausdehnung der Betrachtung auf das gesamte Strömungsfeld kann dieses als vollständig mit einzelnen Flüssigkeitsteilchen belegt und somit als Kontinuum behandelt werden.

### 3.2 Beschreibung der Bewegung innerhalb des Strömungsfeldes

Die fehlende Formbeständigkeit des Flüssigkeitsteilchens erschwert die Behandlung der Flüssigkeitsbewegung analog zu der Bewegung des Massenpunkts in der Festkörpermechanik. Bei der materiellen Betrachtung (**Lagrangesche Methode**) folgt man der Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens. Seine Anfangslage ist zum Zeitpunkt  $t = t_0$  durch die Festlegung des Ortsvektors  $\mathbf{r} (t = t_0) = \mathbf{r}_0$  und den an diesem Ort vorhandenen Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v} (t = t_0)$  gegeben.

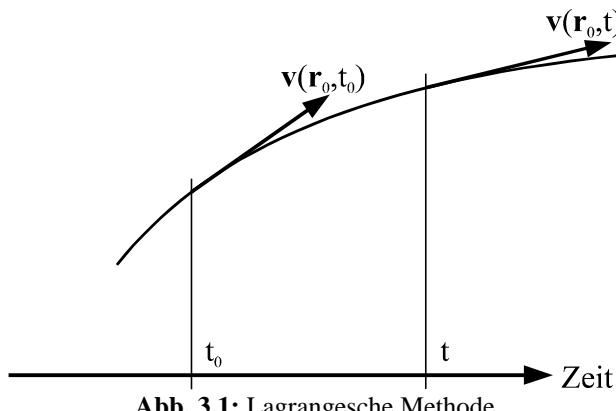


Abb. 3.1: Lagrangesche Methode

Die Bewegung des Teilchens ist dann durch die Angabe des zeitabhängigen Ortsvektors im Hinblick auf ein gewähltes Koordinatensystem zum jeweiligen Zeitpunkt  $t$  bestimmt (Abb. 3.1)

Da die Verfolgung von einzelnen Flüssigkeitsteilchen wenig aussagekräftig ist, hat sich in der Strömungsmechanik die Feldbeschreibung oder **Eulersche** Methode durchgesetzt, welche O. Tietjens wie folgt beschreibt:

„Die große Leistung Eulers, die ihn zum Begründer der Hydrodynamik werden ließ, liegt darin, dass er die Newtonsche Auffassung eines diskreten Flüssigkeitspunktes aufgab und statt dessen den Begriff des Geschwindigkeitsfeldes und des Druckfeldes einführte. In den nach Euler benannten Differentialgleichungen beziehen sich deshalb die einzelnen Glieder dieser Gleichung nicht auf Flüssigkeitsteilchen, sondern auf Raumpunkte und auf die in ihnen vorhandenen Feldgrößen wie Geschwindigkeit, Druck und Dichte sowie auf deren räumliche und zeitliche Änderung.“

Nach der Eulerschen Methode wird demnach die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  an einem bestimmten Punkt beschrieben. Zu einem späteren Zeitpunkt befindet sich am gleichen Ort ein anderes Flüssigkeitsteilchen. In einem kartesischen Koordinatensystem kann die Geschwindigkeit bei dieser Methode als Funktion  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$  angegeben werden, wobei mit  $x, y, z$  die Feldkoordinaten des betrachteten Punktes des Strömungsfeldes bezeichnet sind. Ortsfeste Sonden im Strömungsfeld ermitteln demnach die Geschwindigkeit nach der Eulerschen Methode.

### 3.3 Allgemeine Beschreibung der Feldgrößen und ihrer Veränderung

Die Verwendung der Eulerschen Methode zur Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes hat natürlich auch Auswirkungen auf die Beschreibung der anderen Feldgrößen. Solche Feldgrößen sind z. B. die skalaren Größen Druck und Temperatur. Ihre Veränderung im betrachteten Feld und der mögliche Zusammenhang dieser Veränderung mit der Einwirkung anderer Feldgrößen ist zu beschreiben. Grundlegend dabei ist, dass bei einer Strömung an einem bestimmten Ort des Feldes laufend neue Flüssigkeitsteilchen erscheinen. Eine beliebige Fläche innerhalb des Feldes wird deshalb nicht nur laufend von neuen Flüssigkeitsteilchen durchströmt, es kommt bezüglich dieser Fläche auch zu einem Durchsatz von den an die Teilchen gekoppelten physikalischen Eigenschaften. In diesem Zusammenhang wird dann von einem auf die Zeiteinheit bezogenen **Fluss** oder **Strom** gesprochen. Im physikalischen Sinne handelt es sich dabei um die Ableitung der entsprechenden Größe nach der Zeit am betrachteten Ort. So kommt es zu einem Volumenstrom, wenn nur das durchfließende Volumen von Bedeutung ist, zu einem Massenstrom, wenn Dichteänderungen zu beachten sind oder zu einem Temperaturfluss. Bei diesen drei Beispielen haben die transportierten Größen skalare Eigenschaften, während beim Transport von Impuls der sog. Impulsstrom vektorielle Eigenschaften aufweist.

Änderungen in den Abmessungen des Strömungsfeldes haben ebenso Rückwirkungen auf die Feldgrößen wie z. B. bei bestimmten Eigenschaften die Lage im Feld selbst. In der Hydrostatik wurde bereits die Veränderung des Druckes in Abhängigkeit von der Entfernung vom freien Wasserspiegel beschrieben. Unter alleiniger Wirkung des Schwerkraftfeldes der Erde wird hier die lineare Zunahme mit der Höhe festgestellt. Die Druckverteilung weist demnach ein Gefälle in Richtung der  $z$ -Achse auf. Unter der Einwirkung von zusätzlichen Beschleunigungen können Druckveränderungen auch in die beiden anderen Richtungen des kar-

tesischen Bezugssystems hervorgerufen werden. Im dreidimensionalen Feld kann daher die skalare Größe des Druckes Gefälle nach den unterschiedlichen Richtungen aufweisen. Diese Gefälle werden durch die partiellen Ableitungen des Druckes nach den entsprechenden Richtungen gebildet. Symbolisch wird dieses Vorgehen der partiellen Ableitung einer skalaren Größe nach den Feldkoordinaten als der **Gradient** der betrachteten Größe, im vorliegenden Fall des Druckes bezeichnet. Der zugehörige Operator **grad** steht also stellvertretend für die 3 partiellen Ableitungen  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$ . Somit ist

$$\mathbf{grad} p = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right]^T p = \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} \right]^T$$

Durch die Kennzeichnung mit dem Superscript T wird verdeutlicht, dass die Anordnung der einzelnen Terme aus Platzgründen in einer Zeile und nicht, wie eigentlich erforderlich, in einer Spalte geschieht. Als Transponierte ist der Ausdruck in dieser Schreibweise korrekt.

Bei Seen stellen sich wegen der Temperaturanomalie im Sommer und Winter unterschiedliche Temperaturgradienten ein. Im Sommer nimmt die Temperatur von der Oberflächentemperatur mit zunehmender Tiefe bis auf den Wert von  $4^\circ C$  ab. Im Winter steigt diese dagegen beim zugefrorenen See im freien Wasser von  $0^\circ C$  unter der Eisdecke bis auf  $4^\circ C$  am Grund an. Trotz dieser unterschiedlichen Temperaturgradienten ist die Schichtung in beiden Fällen stabil, da für die Stabilität der Schichtung die Dichteverteilung maßgebend ist. Der Dichtegradient nimmt in beiden Jahreszeiten mit der Tiefe zu. Der unterschiedlich gerichtete Temperaturgradient dagegen bestimmt die Richtung des **diffusiven** Wärmeflusses, welcher jeweils in Richtung zur niedrigeren Temperatur verläuft.

Ein Strömungsfeld mit der Geschwindigkeit Null wie in den vorgenannten Beispielen beleuchtet natürlich nur einen Sonderfall. **Transportvorgänge** im Strömungsfeld werden in erster Linie geprägt von der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, dem **konvektiven** Transport. Dieser Transport wird demnach unmittelbar beeinflusst von der Veränderung der Geschwindigkeit selbst. Da diese eine vektorielle Größe darstellt, kann der Gradientenoperator nicht ohne weiteres auf sie angewendet werden, obwohl auch der Begriff des Geschwindigkeitsgradienten für die Beschreibung des Strömungsfeldes und später auch für die wirksamen Kräfte im Inneren des Feldes bedeutsam ist. Erforderlich ist deshalb im Zusammenhang mit der Geschwindigkeit eine Normierung ihrer Richtungen bezüglich der betreffenden Feldkoordinaten. Im kartesischen Koordinatensystem bedeutet dies eine Zerlegung in die Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$ . Nachdem für diese Komponenten an jedem Punkt des Strömungsfeldes die Richtung bekannt ist, können sie wie skalare Größen in ihren Veränderungen beschrieben werden (Nähere Angaben hierzu in Kap. 3.4).

Dies soll zunächst an einem Beispiel erläutert werden. Betrachtet wird dazu in Abb. 3.2 das Strömungsfeld im Bereich eines sich verengenden Rohrstücks (Düse). Die Hauptströmungsrichtung wird dabei durch die Komponente  $v_x$  beschrieben. Diese erfährt im Bereich der Düse aufgrund des Gesetzes vom Massenerhalt (s. Kap. 4.1) eine Zunahme, welche durch den Ansatz

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x dt$$

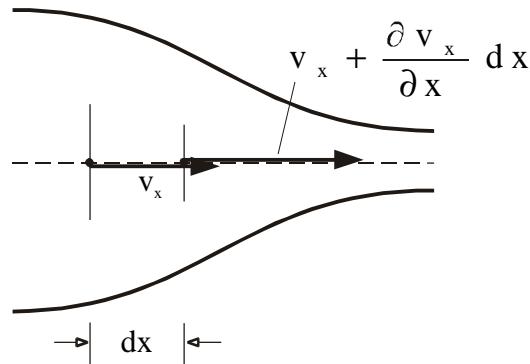


Abb. 3.2: Geschwindigkeitsveränderung in einer Düse

wiedergegeben werden kann. Im Bereich der Verengung treten wegen der Vorgabe durch die Berandung des Strömungsfeldes auch die Geschwindigkeitskomponenten  $v_y$  und  $v_z$  auf (zweckmäßigerweise würden diese wegen der Rotationssymmetrie zu einer radialen Geschwindigkeitskomponente  $v_r$  zusammengefasst). Diese verschwinden wohl auf der Achse des gegebenen Strömungsfeldes, im Strömungsfeld außerhalb der Achse sind jedoch auch die partiellen Ableitungen dieser Komponenten nach den 3 Richtungen vorhanden. Näher wird auf die Veränderung der Geschwindigkeit im Strömungsfeld im nachfolgenden Kapitel 3.4 eingegangen.

Bei der partiellen Ableitung der skalaren Feldgröße entstehen drei Komponenten, welche einen Vektor charakterisieren. Dieser Vektor steht in einem speziellen Zusammenhang mit ausgezeichneten Flächen bzw. Linien des betrachteten Feldes. So bilden, wie bereits im Kapitel 2 erläutert, die Richtungsableitungen des Druckes den Normalenvektor zu den Niveauflächen.

### 3.4 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Unter Geschwindigkeit ist in der Hydraulik unter Bezug auf die **Eulersche Methode** die Fließgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens an einem Punkt des Strömungsfeldes zu verstehen. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ist eine vektorielle Größe, die eine Funktion des Ortes und der Zeit ist.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \text{ in } \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \frac{1}{\text{s}}$$

In der Hydraulik wird die Geschwindigkeit in der Einheit  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , also in Meter/Sekunde angegeben. Ist die Veränderung der Lage eines Flüssigkeitsteilchens innerhalb der Zeiteinheit durch die Ortsvektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  angegeben, dann ist wegen  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{ds}$  das Wegelement  $\mathbf{ds}$

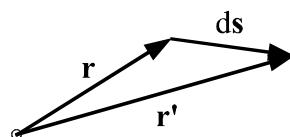


Abb. 3.3: Wegänderung

ebenfalls eine vektorielle Größe und kann in kartesischen Koordinaten durch

$$ds(\mathbf{r}, t) = [dx \ dy \ dz]^T$$

ausgedrückt werden.

Definitionsgemäß ist dann die momentane Geschwindigkeit am Ort mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  durch das in der Zeiteinheit durchlaufene Wegelement für den Grenzübergang  $ds \rightarrow 0$  zu

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \quad (3.1)$$

gekennzeichnet. Im Fall des kartesischen Koordinatensystems mit den entsprechenden Einheitsvektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  für die x, y und z-Richtung ist

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} = \left[ \frac{dx}{dt} \ \frac{dy}{dt} \ \frac{dz}{dt} \right]^T$$

oder

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z \quad (3.2)$$

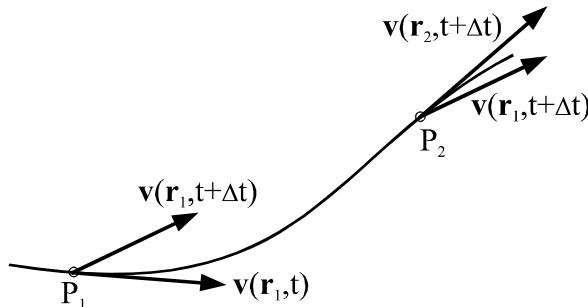
Im allgemeisten Fall zeigt wegen der Abhängigkeit der Geschwindigkeit von Ort und Zeit auch jede der Geschwindigkeitskomponenten diese Eigenschaft, z. B. gilt für die x-Komponente:

$$v_x = f(x, y, z, t)$$

Wegen dieser funktionalen Abhängigkeit wird auch die Veränderung der einzelnen Geschwindigkeitskomponente durch das totale Differential

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

bestimmt. Dadurch wird berücksichtigt, dass sowohl an einem festen Ort eine Veränderung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit erfolgt als auch die Bewegung des Teilchens innerhalb des Geschwindigkeitsfeldes zu Geschwindigkeitsänderungen führen kann.



**Abb. 3.4:** Beschleunigung eines Flüssigkeitsteilchens bei instationärer Bewegung

Die Beschleunigung in x-Richtung wird deshalb durch

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.3)$$

beschrieben. Hierbei werden mit

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}$$

die **lokale** Beschleunigung, d. h. die Veränderung von  $v_x$  mit der Zeit an einem bestimmten Ort und mit

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

die **konvektiven** Beschleunigungen, hervorgerufen durch die Ungleichförmigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung, bezeichnet. Diese drei Terme sind nichtlinear, weil hier die Geschwindigkeitskomponenten mit der ersten Ableitung der x-Komponente multipliziert werden. Die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten sind dabei jeweils durch Division der jeweiligen Wegkomponente durch die Zeitänderung entsprechend  $dx/dt = v_x$  entstanden.

Die Nichtlinearität kann am einfachsten für die Ableitung

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (v_x^2)}{\partial x}$$

der Geschwindigkeitsfunktion erkannt werden. Die Gesamtbeschleunigung des Flüssigkeitsteilchens ist somit

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dv_z}{dt} = \left[ \frac{dv_x}{dt} \frac{dv_y}{dt} \frac{dv_z}{dt} \right]^T$$

was unter Berücksichtigung von Gl. 3.3 in der verkürzten Vektorschreibweise auch durch

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \quad (3.4)$$

wiedergegeben werden kann. Bei dieser Schreibweise wurde der Operator

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})$$

eingeführt, welcher auch auf anderen physikalischen Größen des Strömungsfeldes angewandt werden kann. Im allgemeisten Fall einer Strömung ist demnach wegen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$$

die Geschwindigkeit orts- und zeitabhängig. Wegen der Zeitabhängigkeit werden an jedem Ort zusätzlich die drei partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten nach der

Zeit benötigt, so dass im allgemeisten Fall die Änderung der Geschwindigkeit durch insgesamt 12 Terme ausgedrückt wird. Man spricht hier von einer **instationären** Strömung.

Entfällt die zeitliche Abhängigkeit, ist also

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{s})$$

dann ist die Strömung **stationär**. Für die dreidimensionale Bewegung verbleiben auch hier noch 9 Terme zur Beschreibung der konvektiven Beschleunigung.

Ist bei einer stationären Strömung überdies die konvektive Beschleunigung eines Teilchens längs seines Weges  $\mathbf{s}$  wegen  $\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{s} = 0$ , so ist die Strömung **stationär gleichförmig**. Dieser Sonderfall, der in der Natur streng genommen nie auftritt, spielt bei der Formulierung der Grundgleichungen eine wichtige Rolle. Eine Strömung ist daher

$$\begin{aligned} &\text{gleichförmig} && \text{für} && \partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{s} = 0 \\ &\text{ungleichförmig} && \text{für} && \partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{s} \neq 0 \end{aligned}$$

Die vorstehenden Beziehungen wurden für den allgemeinen Fall der räumlichen Bewegung im kartesischen Koordinatensystem abgeleitet.

Als Beispiel für ein anderes Bezugssystem sind nachstehend Geschwindigkeit und Beschleunigung in ebenen Polarkoordinaten angegeben:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

- Geschwindigkeiten (die Ableitung nach der Zeit ist hier verkürzt durch z. B.  $\dot{x} = dx/dt$  wiedergegeben):

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$v_r = \dot{r} \quad \text{Radialkomponente von } v$$

$$v_\varphi = r \dot{\varphi} \quad \text{Umfangskomponente von } v$$

- Beschleunigungen:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

Für den Sonderfall der Kreisbewegung mit  $r = \text{const.}$  wird:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega}$$

Mit  $\omega$  ist dabei die Winkelgeschwindigkeit mit der Einheit  $s^{-1}$  eingeführt. Für die gleichförmige Kreisbewegung ( $r = \text{const.}$ ;  $\dot{\phi} = \omega = \text{const.}$ ) wird dann:

$$v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

$$a_r = -r\dot{\phi}^2 = -r\omega^2 = -\frac{v_\phi^2}{r} \quad (3.5)$$

Für die Bewegung auf gekrümmten Bahnen spielt die durch Gl. 3.5 wiedergegebene **Zentripetalbeschleunigung** eine wichtige Rolle. Der Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Drehzahl  $n$  ist durch  $\omega = 2\pi n$  gegeben.

### 3.5 Verformungen eines Flüssigkeitsteilchens im Strömungsfeld

In ähnlicher Weise wie in der Festkörpermechanik wird in der Fluidmechanik versucht, die im Inneren des Flüssigkeitskörpers bei der Bewegung entstehenden Spannungen über die dabei stattfindenden Deformationen abzuleiten. Im Unterschied zur Festkörpermechanik sind dabei nicht die reinen Verformungen, sondern die sog. **Formänderungsgeschwindigkeiten** von Bedeutung. Da das einzelne Flüssigkeitsteilchen die Verformungen im Strömungsfeld erleidet, sind hierbei die einzelnen Geschwindigkeitsgradienten wichtig. Alle im allgemeisten Fall der dreidimensionalen Strömung vorkommenden Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten nach den drei Koordinatenrichtungen können als Vektorgradient des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$  in der Form

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

angeschrieben werden. Dieser Ausdruck wird auch als Tensor der Geschwindigkeitsgradienten bezeichnet, welche in der Zeigerschreibweise auch als

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

allgemeingültig beschrieben werden können. Dieser Tensor kann mit Hilfe der Identität

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

welche in der sonst verwendeten symbolischen Schreibweise durch

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \quad (3.6)$$

- unter Verwendung des Operators  $\nabla$  für **grad** - wiedergegeben werden kann (s. Ziff. 3.9), in einen symmetrischen Tensor

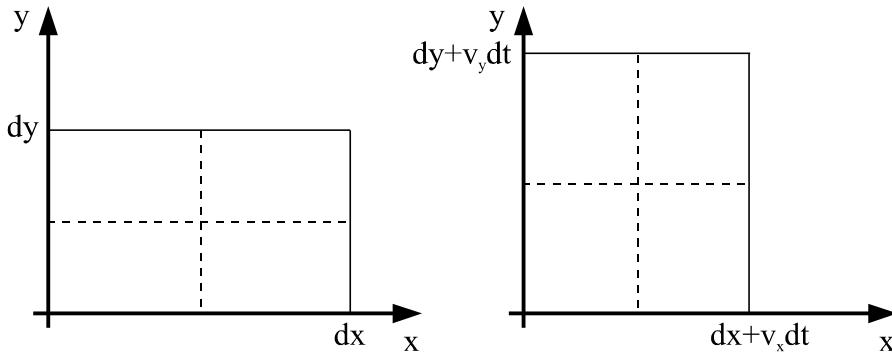
$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

und einen antisymmetrischen Tensor

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.8)$$

zerlegt werden, deren Bedeutung es näher zu untersuchen gilt. Dabei wird aus Gründen der Anschaulichkeit die Verformung für eine ebene Strömung betrachtet.

Für den symmetrische Tensor gilt voraussetzungsgemäß  $e_{ij} = e_{ji}$ , er kann sowohl Diagonalterme ( $i = j$ ) als auch nichtdiagonale Terme ( $i \neq j$ ) enthalten. Sind im Geschwindigkeitsfeld nur die Diagonalterme des Typs  $\partial v_i / \partial x_i$  vorhanden, so verformt sich ein als Rechteck vorgegebenes Flüssigkeitsteilchen so, dass seine Berandungen parallel zueinander bleiben (Abb. 3.5).

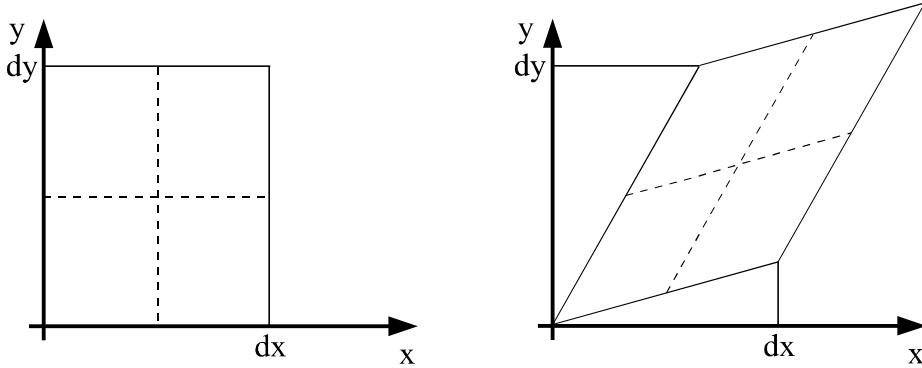


**Abb. 3.5:** Verformung eines Flüssigkeitsteilchens in einem Feld, das nur Diagonalterme des Typs  $\partial v_i / \partial x_i$  enthält

In der Zeiteinheit  $dt$  kommt es damit in  $x$ -Richtung zur relativen Längenänderung  $(\partial v_x / \partial x)dt$ , analog dazu ist die Veränderung in  $y$ -Richtung  $(\partial v_y / \partial x)dt$ . Die Diagonalterme des Tensors sind somit für Dehnung des Flüssigkeitsteilchens zuständig. Ändert sich der Flächeninhalt des Teilchens nicht, im dreidimensionalen allgemeineren Fall wäre dies gleichzusetzen einer Konstanz des Volumens, dann ist die Summe der die Diagonalelemente bildenden Geschwindigkeitsgradienten, welche die **Divergenz** des Geschwindigkeitsfeldes repräsentieren, Null. Für die inkompressible Flüssigkeit spielt diese Aussage für die Massenerhaltung eine wichtige Rolle. Für die Divergenz gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.9)$$

Sind nur die nichtdiagonalen Terme ( $i \neq j$ ) des symmetrischen Tensors von Null verschieden, dann liegt entsprechend Abb. 3.6 eine Geschwindigkeitsverteilung vor, welche zu einer Schebung des betrachteten Flüssigkeitselements führt.



**Abb. 3.6:** Verformung eines Flüssigkeitsteilchens in einem Feld, das nur nichtdiagonale Terme des Types  $\partial v_i / \partial x_j$  mit  $i \neq j$  enthält

Nimmt die Komponente  $v_x$  in  $y$ -Richtung zu, dann bewegt sich ein Punkt in einer Entfernung  $y$  von der  $x$ -Achse schneller als ein Punkt auf der  $x$ -Achse selbst. Damit kommt es zu einer Verdrehung  $(\partial v_x / \partial y)dt$  des oberen linken Eckpunktes des Rechtecks im Uhrzeigersinn. Analog ist auch hierzu wieder eine Verdrehung der rechten unteren Ecke um  $(\partial v_y / \partial x)dt$  zu sehen. Die Kreuzterme des Tensors für die Geschwindigkeitsgradienten sind demnach für die Entstehung von Schubspannungen verantwortlich.

Der antisymmetrische Term  $\omega_{ij}$  enthält keine Diagonalelemente, da die Ausdrücke  $\omega_{ii}$  für jedes  $i$  verschwinden. Das Fluidelement erleidet daher keine Dehnung. Soll das betrachtete Geschwindigkeitsfeld nur antisymmetrische Terme enthalten, so muss zwangsläufig  $e_{ij} = 0$  sein. Gleichzeitig gilt dann

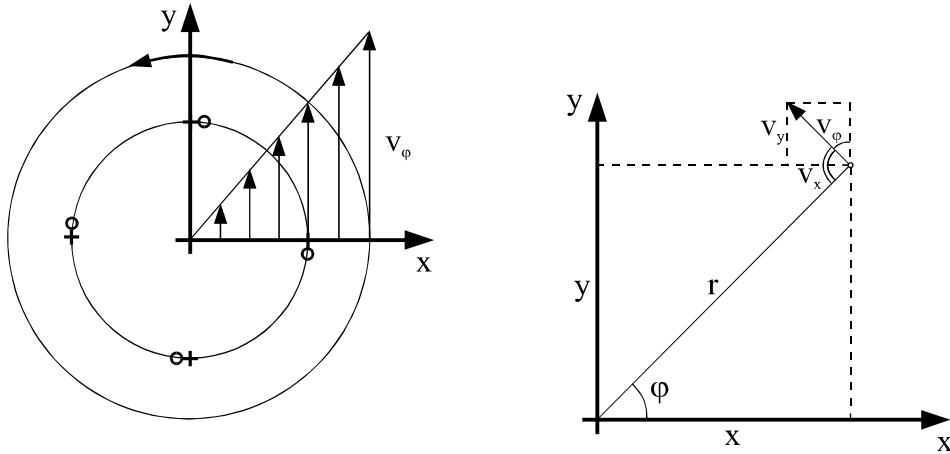
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

Damit kommt es auch zu keiner Scherung des Flüssigkeitsteilchens, da die Drehwinkel entgegengesetzt gleich sind, das angenommene Rechteck sich demnach insgesamt dreht, ohne Verformungen zu erleiden. Das Flüssigkeitsteilchen dreht sich demnach wie ein starrer Körper und erfährt durch diese Bewegung auch keine Spannungen.

In der Hydrostatik wurde mit der Drehung eines zylindrischen Gefäßes bereits eine derartige Drehbewegung vorgestellt. Sie wurde der Hydrostatik deshalb zugeordnet, weil das Wasser im Gefäß für den mitrotierenden Beobachter keine Bewegung ausführt. Für einen Beobachter, welcher von außen auf den rotierenden Rotationsparaboloiden blickt, ist dagegen der Wasserkörper sehr wohl in Bewegung, wobei er wie ein Festkörper bei jeder Umdrehung einmal um seine Drehachse rotiert. Im Abb. 3.7 ist diese Drehung um die  $z$ -Achse durch ein mit einem Kreuz markiertes Flüssigkeitsteilchen zu verfolgen. Dessen Drehung wird durch die Asymmetrie der Kreuzbalken sichtbar gemacht.

Ist das Bezugssystem für die Beschreibung der Bewegung außerhalb des Behälters, so gelten für eine Drehung entgegen den Uhrzeigersinn nach Abb. 3.7 folgende Beziehungen:

$$\frac{v_y}{v_\phi} = \cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \frac{-v_x}{v_\phi} = \sin \varphi = +\frac{y}{r}$$



**Abb.: 3.7:** Rotierendes Flüssigkeitsteilchen, Beziehungen zwischen der Umfangsgeschwindigkeit und den Geschwindigkeitskomponenten im kartesischen Koordinatensystem

Bei der stationären Drehbewegung sind die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \text{const.}$  und  $v_\phi = \omega \cdot r$ , so dass für die Geschwindigkeitskomponenten des kartesischen Koordinatensystems die Ausdrücke  $v_y = \omega \cdot x$  und  $v_x = -\omega \cdot y$  gefunden werden. Wegen  $\omega = \text{const.}$  gelten für die jeweiligen partiellen Ableitungen nach den unabhängigen Variablen:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega$$

Durch die Subtraktion der beiden Ausdrücke wird

$$\left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 2\omega$$

erhalten. Rein formal entspricht dieser Ausdruck der z-Komponente eines Vektors **rot v** mit den Komponenten

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]^T \quad (3.10)$$

Diese Komponenten können über folgende Determinante berechnet werden

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 2\omega \quad (3.11)$$

Demnach beschreibt der Ausdruck **rot v** offensichtlich die **Rotation** eines Flüssigkeitsteilchens mit der halben Winkelgeschwindigkeit. Die Bestimmung der z-Komponente führt nämlich zu dem Ausdruck

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

welcher mit dem vorgenannten identisch ist. Durch das Beispiel des rotierenden Behälters wird der Begriff der Rotation für einzelne Bereiche des Strömungsfeldes verdeutlicht. Hierbei verhält sich die Flüssigkeit wie ein starren Körper. Die Umfangsgeschwindigkeit wächst entsprechend Bild 3.7 mit wachsender Entfernung von der Drehachse. Die Größe  $\omega_z$  ist für den von der Drehung erfassten Bereich konstant und wegen  $\omega = \text{const.}$  auch von  $x$  und  $y$  unabhängig.

Die Gesamtbeschleunigung eines Flüssigkeitsteilchens nach Gl. 3.4 kann mit Hilfe der vorstehenden Überlegungen zur Verformung auch anders dargestellt werden. In der Zeigerschreibweise wird Gl. (3.4) wie folgt erweitert

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

Daraus kann dann eine wichtige Form für die Beschleunigung dadurch gewonnen werden, dass diese auch als Gradient der kinetischen Energie pro Masseneinheit wiedergegeben wird:

$$\frac{d \mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 \quad (3.12)$$

Auf das Zusammenwirken zwischen Scherung und Rotation wird später am Beispiel einfacher Strömungen, wie z.B. der Spaltströmung, näher eingegangen.

Um die Stärke der Rotation zu messen wird über das Umlaufintegral

$$\oint \mathbf{v} ds = \Gamma \quad (3.13)$$

zunächst die sog. **Zirkulation** ermittelt. Mit der dabei eingeschlossenen Fläche  $A$  ergibt sich schließlich für die Rotationsstärke der Ausdruck  $\Gamma/A$ . Im rotationsbehafteten Strömungsfeld ist  $\Gamma \neq 0$ . Für die Kreisbewegung wird für die Integration längs  $r = \text{const.}$  mit  $v_\phi = \text{const.}$  für die Zirkulation

$$\Gamma = r \omega \cdot 2r \pi = 2 \omega \cdot A$$

Somit ist  $\Gamma / A = 2 \omega$ .

Für die Behandlung von Strömungen spielt der Begriff der Rotation eine große Rolle, da unter dem Einfluss der Reibung immer auch Drehbewegungen einzelner Flüssigkeitsteilchen im Strömungsfeld hervorgerufen werden (s. auch Kap. 6).

### 3.6 Ausgezeichnete Linien eines Strömungsfeldes

Eine Strömung ist dann ausreichend beschrieben, wenn an jedem Punkt des Strömungsfeldes Druck und Geschwindigkeit bekannt sind. Im skalaren Druckfeld bilden Linien gleichen Druckes sog. **Niveaulinien**. Die Feldlinien eines Vektorfeldes sind im Falle des Geschwindigkeitsfeldes die sog. **Stromlinien** (Abb. 3.8). In jedem Punkt einer Stromlinie gibt die Tangente die Richtung der örtlichen Geschwindigkeit an. Nachdem nach dieser Definition  $ds$  und  $\mathbf{v}$  gleichgerichtet sind, ist

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = 0 \quad (3.14)$$

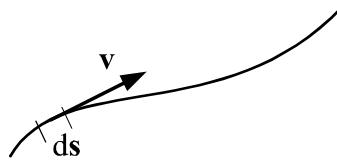


Abb. 3.8 Stromlinie

Für das Vektorprodukt aus dem Linienelement  $d\mathbf{s}$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  gilt

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$$

Für die Stromlinie gilt demnach nach der Berechnung der Determinante:

$$\mathbf{i}(v_y dz - v_z dy) + \mathbf{j}(v_z dx - v_x dz) + \mathbf{k}(v_x dy - v_y dx) = 0 \quad (3.15)$$

Aus dem Begriff der Stromlinie abgeleitet sind die **Stromröhre** und der **Stromfaden**. Die Stromröhre wird von Stromlinien begrenzt, so dass senkrecht zu dieser Berandung keine Flüssigkeit ausfließen kann. Längs des Umfangs der Stromröhre können in einem beliebigen Schnitt die Geschwindigkeiten unterschiedlich groß sein (Abb. 3.9). Beim Stromfaden ist die Stromröhre auf ihre Achse zusammengeschrumpft. Damit ist beim Schnitt durch den Stromfaden nur noch eine Geschwindigkeit maßgebend. Die **Rohrhydraulik** kann weitestgehend in Anlehnung an die Vorstellung des Stromfadens behandelt werden. Hier wird dann als maßgebliche Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt herangezogen. Auch die Gerinnehydraulik wird vorwiegend eindimensional behandelt, die zu treffenden Vereinfachungen sind hier jedoch schwerwiegender als bei der Rohrströmung.

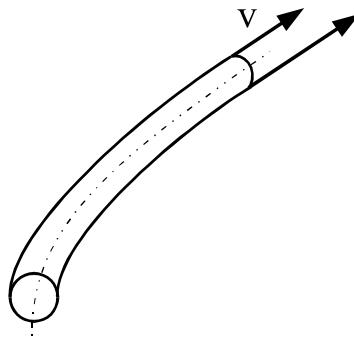


Abb. 3.9: Durch ein Bündel von Stromlinien begrenzte Stromröhre

Die **Bahnlinie** beschreibt den Weg eines Flüssigkeitsteilchens und steht somit unmittelbar für die Anwendung der Lagrangeschen Methode der Beschreibung der Bewegung. Bei einer räumlichen Bewegung ist wegen

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i} v_x dt + \mathbf{j} v_y dt + \mathbf{k} v_z dt \quad (3.16)$$

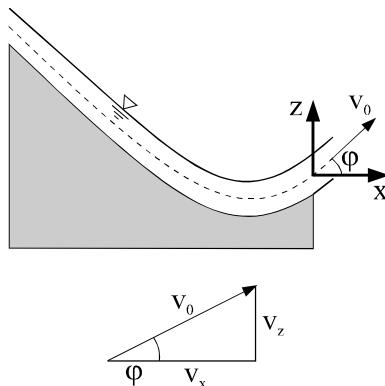
In der Zeiteinheit werden vom Flüssigkeitsteilchen daher die Wegstrecken

$$\begin{aligned} dx &= v_x dt \\ dy &= v_y dt \\ dz &= v_z dt \end{aligned}$$

zurückgelegt, aus denen der Betrag  $ds$  errechnet werden kann.

Nachstehend ist eines der wenigen Beispiele für eine direkte Anwendung der Lagrangeschen Methode wiedergegeben, bei dem die Bahn eines Freistrahls nach Verlassen einer Sprungschanze berechnet wird.

**Beispiel 3.1:** Sprungschanze am Ende eines Wehrrückens



**Abb. 3.10:** Sprungschanze am Ende eines Wehrrückens

Randbedingung  $x = 0, z = 0 : v_0$  unter Winkel  $\varphi$

Geschwindigkeitskomponenten :  $v_{x,0} = v_0 \cos \varphi, v_{z,0} = v_0 \sin \varphi$

Die schrittweise Integration über die Zeit führt unter Beachtung der Randbedingungen zu den Geschwindigkeits- und Wegkomponenten :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \varphi \\ 0 \\ v_0 \sin \varphi - gt \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \varphi \cdot t \\ 0 \\ v_0 \sin \varphi \cdot t - g \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Elimination der Zeit aus  $x(t) = v_0 \cos \varphi \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi}$

Einsetzen in die z-Komponente des Ortsvektors  $\mathbf{s}$ :

$$z(x) = \frac{v_0 \sin \varphi \cdot x}{v_0 \cos \varphi} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \right)^2 = \tan \varphi \cdot x - \frac{1}{2} g \left( \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \right)$$

Scheitelwert  $z_{\max}$  für die Bahnkurve, wenn  $\frac{dz(x)}{dx} = 0$

$$\tan \varphi = \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \varphi}$$

Auflösung nach x:

$$x = \frac{\tan \varphi \cos^2 \varphi \cdot v_0^2}{g} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi v_0^2}{g}$$

Wegen der Behandlung vieler Strömungsvorgänge mit Hilfe der eindimensionalen Stromfadentheorie ist es hilfreich, die Gesamtbeschleunigung auch auf die natürlichen Koordinaten des die Bahnlinie begleitenden Dreibeines (Abb. 3.11) zu beziehen.

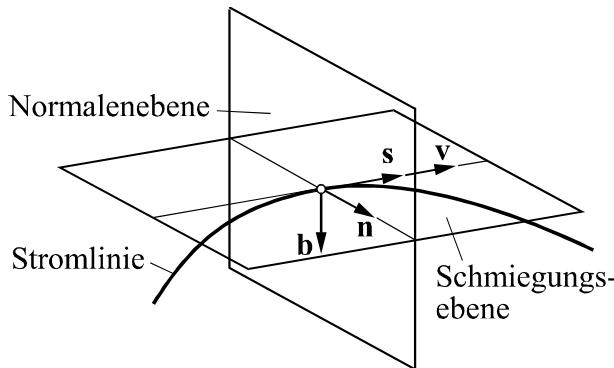


Abb. 3.11: Begleitendes Dreibein

Hierbei wird also von einer Lagrangeschen Betrachtung ausgegangen, da das Koordinatensystem der Bewegung der Fluidteilchen folgt. Nur im Fall der stationären Strömung gelten diese Beziehungen dann auch für die Stromlinie bzw. den Stromfaden. In einem beliebigen Punkt der Stromlinie wird durch den Tangentenvektor und den Normalenvektor die Schmiegeungs-ebene aufgespannt. Die Projektion der Kurve in diese Ebene hinein erlaubt es, einen Krümmungsradius  $r$  für die Stromlinie in diesem Punkt anzugeben. Die zugehörigen Geschwindigkeiten sind  $v$  in Richtung der Tangente,  $v_n$  die Geschwindigkeit in Normalenrichtung und  $v_b$  die Geschwindigkeit in der Richtung der Binormalen. Definitionsgemäß können nur lokale Beschleunigungen in den Normalenrichtungen auftreten. Für den Beschleunigungsvektor gilt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r} \\ \frac{\partial v_b}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.17a)$$

Die Beschleunigungskomponente in Tangentenrichtung, die **Tangentialbeschleunigung**, kann noch wie folgt umgeformt werden

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (3.17)$$

Insbesondere für die stationäre Strömung folgen aus diesen Beziehungen wesentliche Vorteile für die Behandlung der Strömung längs der Bahn- bzw. Stromlinie. Zugleich geht aus diesen Beziehungen hervor, dass bei gekrümmten Bahnlinien grundsätzlich mit Beschleunigungen

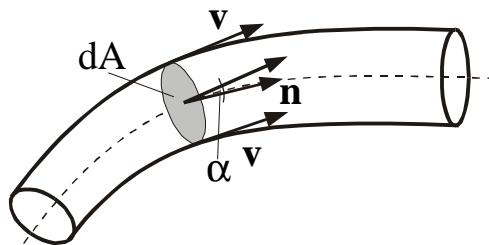
normal zur Fließrichtung gerechnet werden muss. Die Zentripetalbeschleunigung beeinflusst insbesondere die Druckverteilung im Strömungsfeld.

Neben der Strom- und Bahnlinie ist als dritte Linie die **Streichlinie** von Bedeutung. Sie stellt die momentane Verbindung aller Teilchen dar, die vorher einen bestimmten Punkt durchlaufen haben. So gibt die fotografische Aufnahme der Spur eines Tracers, der an einem Punkt der Strömung kontinuierlich zugegeben wird, eine momentane Streichlinie wieder.

Bei der stationären Strömung ist das Geschwindigkeitsfeld unabhängig von der Zeit. Für diesen Sonderfall stimmen Strom-, Bahn- und Streichlinien überein. Diese besonderen Linien können zur Sichtbarmachung der Strömung herangezogen werden. Im Labor sind Strömungen innerhalb von transparenten Berandungen (Glas, Plexiglas) besonders gut zu beobachten. Durch die Zugabe von Teilchen werden Bahnlinien erkennbar. Häufig genügt es bereits, durch Ausleuchten im Wasser mittransportierte Luftbläschen sichtbar zu machen. Bei stationärer Strömung unter geringen Geschwindigkeiten werden durch die Injektion von Fluoreszenzfarbstoffen Streichlinien erzeugt, die hier zugleich Bahn- und Stromlinien wiedergeben. Geschwindigkeitsfelder mit einer frei zugänglichen Oberfläche, die für die Gerinneströmung charakteristisch sind, können durch schwimmende Teilchen in ihrer Struktur erkannt werden. Durch fotografische Aufnahmen bilden sich diese Teilchen über die Dauer der Belichtungszeit als Striche ab, so dass die Stromlinien zum Zeitpunkt der Aufnahme am Bild erscheinen.

### 3.7 Volumenstrom und Durchfluss

Betrachtet wird die Stromröhre für eine stationäre Bewegung. In der Zeiteinheit  $dt$  würde ein Teilchen an der äußeren Berandung einer beliebig definierten Schnittfläche  $A$  den Weg  $ds = v dt$  zurücklegen. Da die Geschwindigkeit sich über den Umfang der Stromröhre verändert, sind die zurückgelegten Wege unterschiedlich groß (Abb. 3.12).



**Bild 3.12:** Volumenstrom durch eine beliebige Schnittfläche einer Stromröhre

Soll das Volumen des in der Zeiteinheit  $dt$  gebildeten Flüssigkeitskörpers ermittelt werden, so ist dafür die Projektion der ortsabhängigen Richtung der jeweils vorherrschenden Geschwindigkeit auf die unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Achse der Stromröhre geneigten Flächennormale erforderlich. Mathematisch läuft dies auf die Bildung des Skalarproduktes zwischen dem Geschwindigkeitsvektor  $v$  und dem Normalenvektor  $n$  der Fläche  $A$  hinaus. Der Normalenvektor wurde hierbei an der Schnittfläche in Strömungsrichtung orientiert.

Der **Volumenstrom** durch eine beliebige Querschnittsfläche  $A$  pro Zeiteinheit ist somit

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \iint_A v(s) \cdot n \, dA \quad (3.18)$$

Das Ergebnis des Skalarprodukts dieser beiden Vektoren ist die skalare Größe Volumenstrom. In der Hydraulik wird der skalare Volumenstrom allgemein als **Durchfluss** bzw. bei der Betrachtung am Kontrollvolumen als **Zu- und Abfluss** bezeichnet. Die Einheit des Volumenstroms ist  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , allgemein angegeben im  $\text{m}^3/\text{s}$ , also Kubikmeter pro Sekunde oder, bei kleinen Abflüssen, z.B. in Rohrleitungssystemen, in Litern pro Sekunde  $\text{l}/\text{s}$ .

Die mittlere Geschwindigkeit in der Stromröhre wird einfach durch Division durch die Querschnittsfläche zu

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \iint_A \mathbf{v}(s) \mathbf{n} dA \quad (3.19)$$

erhalten.

Wird ein Stromfaden der Betrachtung zugrundegelegt, so gilt wegen  $v = \text{const.}$

$$\dot{V} = A \cdot v = Q \quad (3.20)$$

Durch Multiplikation mit der Dichte  $\rho$  kann der **Massenstrom**

$$\dot{m} = \rho A v \quad (3.21)$$

errechnet werden.

### 3.8 Die Stromfunktion

Für ebene und axialsymmetrische Strömungen hängt das Strömungsfeld nur noch von zwei Koordinaten ab. Im Fall der ebenen Strömung seien dies die Koordinaten  $x$  und  $y$ , im axial-symmetrischen die Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$ . Mit Hilfe der Stromfunktion kann für diese Fälle für das inkompressible Fluid das vektorielle Geschwindigkeitsfeld auf das skalare Feld der Stromfunktion zurückgeführt werden. In den kartesischen Koordinaten werden über die Stromfunktion  $\Psi(x,y)$  die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  wie folgt bestimmt

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.22)$$

Da ein ebenes Strömungsfeld vorausgesetzt wird, ist  $v_z = 0$ . Setzt man diese Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten in die Gleichung 3.15 für die Stromlinie ein, so wird zunächst deutlich, dass sowohl die  $x$ -Komponente als auch die  $y$ -Komponente entfallen. Es bleibt nur noch die  $z$ -Komponente des Ausdrucks für die Stromlinie übrig. Für diese wird dann nach Einsetzen der obigen Beziehungen

$$v_x dy - v_y dx = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = d\Psi = 0 \quad (3.23)$$

das totale Differential für die Stromfunktion erhalten. Dies bedeutet, dass hier  $\Psi$  konstant ist. Eine Linie mit konstanter Stromfunktion beschreibt demnach im ebenen Strömungsfeld eine **Stromlinie**.

### 3.9 Alternative Darstellung der verwendeten Differentialoperatoren

Die bisher vorgestellten Differentialoperatoren **grad**, **div** und **rot** sind wichtige Hilfsmittel zur Beschreibung des Strömungsfeldes. In der gewählten symbolischen Schreibweise wird der Zusammenhang mit der zu beschreibenden Eigenschaft hervorgehoben. Es ist jedoch ebenso möglich, durch die Verwendung eines symbolischen Vektors  $\nabla$ , dem sog. **Nablacektor**, diese Operationen darzustellen. Im einzelnen gelten

$$\nabla p = \mathbf{grad} p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

Die Divergenz wird demnach durch das skalare Produkt, die Rotation durch das vektorielle Produkt zweier Vektoren gebildet. In kartesischen Koordinaten ist

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Für den Vektorgradienten gilt sinngemäß

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}$$

Der **Laplace-Operator** ist das Skalarprodukt des Nablaoperators mit sich selbst:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

Er schreibt die Summierung der zweiten partiellen Ableitungen vor und kann sowohl auf skalare als auch auf vektorielle Funktionen angewandt werden.

**Tabelle 3.1:** Prinzipielle Verknüpfungen bei Differentialoperatoren

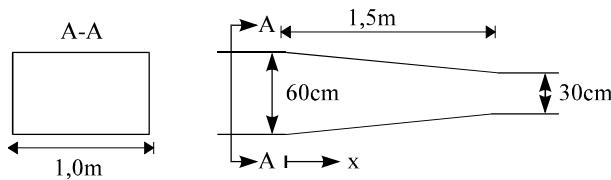
Operator	Symbol	Verknüpfung	Argument	Ergebnis
Gradient	<b>grad</b> p	$\nabla p$	Skalar	Vektor
Vektorgradient	<b>grad</b> v	$\nabla \mathbf{v}$	Vektor	Tensor 2. Stufe
Divergenz	<b>div</b> v	$\nabla \cdot \mathbf{v}$	Vektor	Skalar
Rotation	<b>rot</b> v	$\nabla \times \mathbf{v}$	Vektor	Vektor
Laplace Operator	$\Delta p$	$(\nabla \cdot \nabla)p$	Skalar	Skalar
Laplace Operator	$\Delta \mathbf{v}$	$(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{v}$	Vektor	Vektor

## Formelzeichen zu Kapitel 3

Zeichen	Benennung	Einheit
<b>a</b>	Beschleunigung	$\text{m/s}^2$
A	Schnittfläche	$\text{m}^2$
<b>i,j,k</b>	Einheitsvektoren für die Komponenten im kartesischen Koordinatensystem	1
<b>n</b>	Normalenvektor	
n	natürliche Koordinate (normal)	m
	Drehzahl	1/s
p	Flüssigkeitsdruck	Pa
Q	Ab-, Durchfluss	$\text{m}^3/\text{s}$
r	Radius	m
<b>r</b>	Ortsvektor	-
r, $\phi$	ebene Polarkoordinaten	-
s	Weglänge	m
t	Zeit	s
u	örtliche Geschwindigkeit	$\text{m/s}$
v	mittlere Geschwindigkeit	$\text{m/s}$
<b>v</b>	Geschwindigkeitsvektor	$\text{m/s}$
$v_x, v_y, v_z$	Komponenten der Geschwindigkeit im kartesischen Koordinatensystem	$\text{m/s}$
$v_r, v_\phi$	Komponenten der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten	$\text{m/s}$
x, y, z	kartesische Koordinaten	m
$\Gamma$	Zirkulation	$\text{m}^2/\text{s}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg/m}^3$
<b><math>\omega</math></b>	Winkelgeschwindigkeit	1/s
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Komponenten des Rotationsvektors	1/s

**Aufgabe 3.1**

Das im Querschnitt und in der Ansicht dargestellte Gerinne ist vollständig mit Wasser gefüllt. Die Querschnittshöhe reduziert sich auf dem 1,5 m langen Abschnitt von 0,6 m auf 0,3 m.

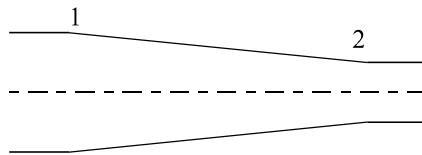


Der Abfluss beträgt  $Q = 0,6 \text{ m}^3/\text{s}$ .

- Stellen Sie die Beschleunigung als eine Funktion von x dar.
- Wie groß ist die Beschleunigung 30 cm nach Beginn der Verengung?

**Aufgabe 3.2**

Erklären Sie die Begriffe "totale, lokale und konvektive Ableitung".

**Aufgabe 3.3**

Der Querschnitt einer Rohrleitung reduziert sich von 1 nach 2 um die Hälfte.

- Welche Art der Strömung liegt vor, wenn der Durchfluss konstant ist?
- Wie wirkt sich die Querschnittsänderung auf die mittlere Fließgeschwindigkeit aus?

**Aufgabe 3.4**

Erläutern Sie den Unterschied zwischen den Begriffen Stromlinie und Bahnnlinie. In welchen Fällen sind beide Linien identisch?

**Aufgabe 3.5**

Ein zweidimensionales stationäres Strömungsfeld ist durch die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x = 1.5 \cdot y$  und  $v_y = 1.0 \cdot x$  gekennzeichnet. Die Konstanten sind so festgelegt, dass beim Einsetzen der Koordinaten in m die Geschwindigkeit in m/s berechnet wird. Das Strömungsfeld ist durch Stromlinien im Bereich  $y = x \leq 6$  zu skizzieren. Allgemein gültige Beziehungen für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a sind abzuleiten. Wie groß ist die Beschleunigung im Punkt P ( $x = 3,0$ ,  $y = 2,0$ )?

**Aufgabe 3.6**

Ein zweidimensionales Strömungsfeld ist durch die Vorgabe der Geschwindigkeitskomponenten  $v_x = +2x$  und  $v_y = -2y$  beschrieben. Prüfen Sie, ob die Kontinuitätsbedingung erfüllt ist und die Strömung rotationsfrei ist.

**Aufgabe 3.7**

In einer x-y-Ebene sind in einem Punkt A ( $x_1, y_1$ ) die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  vorgegeben. Für die Punkte B ( $x_1 + dx, y_1$ ), C ( $x_1, y_1 + dy$ ) und D ( $x_1 + dx, y_1 + dy$ ) sind die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten anzutragen. Beginnend im Punkt A ist entgegen dem Uhrzeigersinn die Zirkulation für den gegebenen Bereich des Strömungsfeldes zu bestimmen. Glieder höherer Ordnung sind dabei zu vernachlässigen. Wie groß ist die Stärke der Rotation? Unter welcher Voraussetzung ist die Strömung rotationsfrei?

## 4 Grundgleichungen der Hydromechanik

In der Hydrostatik (Kap. 2) wurde das Kräftegleichgewicht am ortsfesten Volumenelement formuliert. Die allein als Druckkräfte wirkenden äußeren Kräfte stehen hierbei im Gleichgewicht mit den wirksam werdenden Massenkräften. In der Hydrodynamik dagegen sind die Kräfte in Bezug zum Bewegungsvorgang zu setzen. Ein Ungleichgewicht zwischen den äußeren Kräften und den Massenkräften führt z.B. zu einer Beschleunigung der tragen Masse des Volumenelements.

**Beispiel 4.1:** Anfahren des mit Flüssigkeit gefüllten rotierenden Zylinders (Abb. 4.1):  
 Die Massenkräfte infolge der einsetzenden Zentrifugalbeschleunigung werden noch nicht durch eine nach innen wirkende Druckkraft ausgeglichen. Daher erfolgt eine Bewegung der Flüssigkeitsteilchen nach außen.

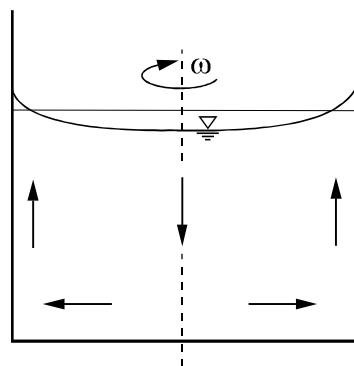


Abb. 4.1: Strömung beim Anfahren eines rotierenden Zylinders

Bei einem Gleichgewicht der äußeren Kräfte werden die antreibenden Kräfte dagegen durch die Widerstandskräfte ausgeglichen, welche durch die Bewegung selbst hervorgerufen werden. Dann erfolgt ebenfalls keine Beschleunigung des ortsfesten Volumenelementes. In diesem Sinn ist die Hydrostatik ein Sonderfall der Hydrodynamik, bei dem die Bewegung im Strömungsfeld den Grenzwert Null einnimmt.

In diesem Kapitel werden zunächst die Erhaltungssätze formuliert, welche die Grundlage für die gesamte Hydromechanik bilden. Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Formänderungsgeschwindigkeiten wird durch die Materialgesetze formuliert. Da diese nur für die laminare Strömung direkt verwendet werden können, wird näher auf die Ermittlung der am Volumenelement angreifenden Oberflächenkräfte eingegangen. In Verbindung mit den Materialgesetzen können dann die wichtigsten Bewegungsgleichungen vorgestellt werden.

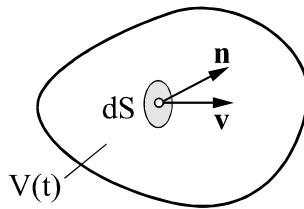
### 4.1 Erhaltungssätze der Hydromechanik

Die Erhaltungssätze werden hier einschließlich des Gesetzes von der Erhaltung der Masse angeführt, obwohl dieses Gesetz dem voranstehenden Kapitel über die Kinematik zuzuordnen wäre, da hier die Einwirkung von Kräften nicht zu beachten ist. Da jedoch die Transportvorgänge im Strömungsfeld an den Volumen- oder Massenstrom gekoppelt sind, ist das Gesetz von der Erhaltung der Masse bestens geeignet, auf den Impuls- und Energietransport hinzuführen.

Die Erhaltungssätze werden im Bauingenieurwesen allgemein angesetzt für die Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie. Je nach dem dabei zugrundegelegten Kontrollvolumen können sie in ihrer **lokalen** Form für unendlich kleine oder in der **integralen** Form für anwendungsbezogene größere Bereiche des Strömungsfeldes wiedergegeben werden.

#### 4.1.1 Das Gesetz der Massenerhaltung für die Flüssigkeitsbewegung

Allgemein kann ein beliebig geformtes Volumen  $V$  im Innern des Strömungsfeldes betrachtet werden, welches durch eine geschlossene Oberfläche  $S$  begrenzt ist (Abb. 4.2).



**Abb. 4.2:** Volumenelement mit Teiloberfläche  $dS$

Dieses Volumen wird laufend durchströmt, sodass durch seine Oberfläche sowohl Flüssigkeit ein- als auch austritt. Der Einheitsvektor für die Normale zur Oberfläche ist dabei stets nach außen gerichtet. Dies bedeutet, dass, für sich betrachtet, die Zuflüsse negativ, Abflüsse positiv sind. Die Änderung der Gesamtmasse innerhalb des Volumens kann nur von der zeitlichen Änderung der Dichte abhängen, da das Volumen selbst als unveränderlich vorgegeben ist. Unter diesen Voraussetzungen muss die zeitliche Änderung der Masse innerhalb des Volumens ausgeglichen werden durch den Massenfluss durch die Oberfläche, wobei die Summe dieser beiden Terme zu Null werden muss.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4.1)$$

In dem Ausdruck auf der linken Seite kann, so im betrachteten Volumen die Dichte ausschließlich von der Zeit und nicht von der Lage im Volumen abhängig ist, die totale Differentiation nach der Zeit durch die partielle ersetzt werden. Nach dem Integralsatz von Gauß kann das Flächenintegral auf der rechten Gleichungsseite umgewandelt werden in ein Volumenintegral, so dass

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV \quad (4.2)$$

wird. Die Massenbilanz an einem beliebigen Volumen kann deshalb allein durch ein Volumenintegral in der Form

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (4.3)$$

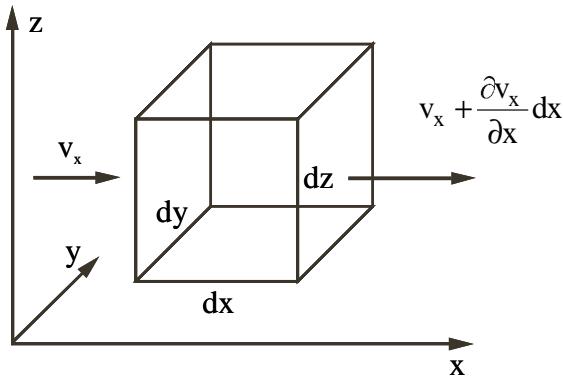
angeschrieben werden. Dies ist die integrale Form der **Kontinuitätsbedingung**. Wird für das betrachtete Volumen der Grenzübergang  $dV \rightarrow 0$  vollzogen, so wird die lokale Form der Kontinuitätsbedingung mit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (4.4)$$

erhalten. Änderungen der Dichte müssen z.B. bei instationären Strömungen in Rohrleitungssystem und in gespannten Grundwasserleitern beachtet werden. Kann dagegen im gesamten betrachteten Strömungsfeld die Änderung der Dichte vernachlässigt werden, so wird die Flüssigkeit als **inkompressibel** angesehen. Dies kann z. B. für den gesamten Anwendungsbereich der Gerinnehydraulik geschehen. Die Kontinuitätsbedingung vereinfacht sich dann zu

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.5)$$

In dieser lokalen Form kann sie auch aus der Bilanzierung des Volumenstroms am einfachen Volumenelement der Abb. 4.3 abgeleitet werden.



**Abb. 4.3:** Bilanzierung des Volumenstroms am ortsfesten Volumenelement

Für die x-Richtung gilt dann beispielsweise für den Unterschied zwischen Zufluss und Ausfluss

$$\left( -v_x + v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz .$$

Die analogen Betrachtungen für die beiden anderen Koordinatenrichtungen und die Division durch das Volumen  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  führen dann zu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

womit die Bedeutung des Operators  $\operatorname{div}$  als die Spur des Geschwindigkeitsgradiententensors aufgezeigt ist. In dieser lokalen Form ist die Kontinuitätsbedingung jedoch nicht für alle Anwendungsbereiche anwendbar. Dies wird deutlich, wenn die Herkunft dieses Terms in seiner integralen Form noch einmal betrachtet wird. Bei der Anwendung auf die inkompressible Flüssigkeit wird wegen  $\rho = \text{const.}$  folgender Ausdruck erhalten

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4.6)$$

Bei ausreichend großen Kontrollvolumen ist es möglich, dass innerhalb des Volumens **Quellen** oder **Senken** auftreten. Direkt zu ersehen ist dies am Beispiel der Grundwasserströmungen, bei denen Senken in Gestalt von Förderbrunnen oder Quellen als Schluckbrunnen Bestandteile des zu simulierenden Strömungsfeldes sind. Die Aufsummierung der Volumenströme über die freie Schnittfläche muss dann ausgeglichen werden durch die Veränderung im umschlossenen Volumen selbst. Anstelle der Masse wird hierbei das Volumen bilanziert, so dass mit

$$\frac{d}{dt} \iiint_V dV = - \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.7)$$

quellen- bzw. senkenbehaftete Kontrollvolumen erfasst werden können. Von Bedeutung ist diese Art der Kontinuitätsbedingung auch für die Gerinnehydraulik, bei der als obere Berandung des betrachteten Kontrollvolumens die freie Oberfläche angesetzt wird. Instationäre Strömungen wie z. B. ein Hochwassereignis in einem Fluss bedingen eine Veränderung der Oberfläche. Bei der Betrachtung eines beliebigen Gerinneabschnitts wird mit dem linken Term die Speicherung oder Abgabe von Flusswasser berücksichtigt, je nachdem ob der Wasserspiegel steigt oder fällt. Wesentlich ist hierbei, dass das Kontrollvolumen selbst zeitlich veränderlich ist.

In der lokalen Form führt die Kontinuitätsbedingung für inkompressible Flüssigkeiten zu der anschaulichen Erklärung, dass wegen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.5)$$

die Zuflüsse zum Kontrollvolumen durch die Ausflüsse ausgeglichen werden müssen, das Innere des Kontrollvolumens demnach quellen- und senkenfrei bleibt. Besonders einfach ist die Anwendung für den Abfluss innerhalb einer Stromröhre, wie er im Kap. 3.7 bereits angedeutet wurde, wenn die Geschwindigkeitsverteilung durch die mittlere Fließgeschwindigkeit ersetzt werden kann. Dann gilt

$$Q = v \cdot A = \text{const.} \quad (3.20)$$

Praktisch angewendet wird diese Beziehung insbesondere bei der Rohrhydraulik, wie das nachfolgende Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 4.2:** Stationäre Strömung durch eine Düse (Abb. 4.4)

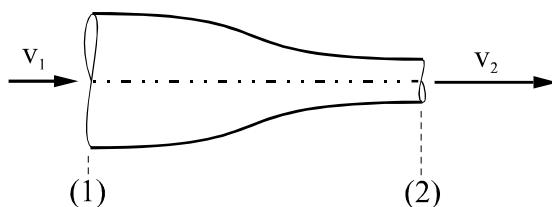


Abb. 4.4: Stationäre Strömung durch eine Düse

Kontinuitätsbedingung:

$$Q = \text{const.} = v \cdot A$$

Anwendung auf die freien Schnittflächen (1) und (2):  
Bilanzierung nach Gl. (4.6)

$$-v_1 A_1 + v_2 A_2 = 0$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Geschwindigkeit nach der Verengung:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

In diesem Fall kann durch die Anwendung der Kontinuitätsbedingung die Veränderung der mittleren Geschwindigkeit infolge des vorgegebenen Strömungsfeldes berechnet werden.

#### 4.1.2 Impulssatz

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz der Mechanik ist die erste zeitliche Ableitung des Impulses  $\mathbf{I}$  des Massenpunktes  $m$  gleich der auf ihn einwirkenden Kraft  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{d}{dt} (mv) \quad (4.7)$$

Im Klammerausdruck ist der Impuls als das Produkt der Masse  $m$  mit ihrer Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  darstellt. In Anlehnung an den Begriff des Volumenstroms als  $\dot{V} = dV/dt$  kann die zeitliche Änderung des Impulses als Impulsstrom bezeichnet werden. Da er die Dimension einer Kraft hat, wird dieser Ausdruck in DIN 4044 als Impulskraft bezeichnet. Diese Darstellung ist allerdings irreführend, da in der Fluidmechanik die Änderung der Bewegung infolge der einwirkenden Kräfte interessiert. Der gleichzeitige Gebrauch des Ausdrucks Bewegungsgröße für den Impuls weist darauf hin. Da die Gleichung 4.7 den Zusammenhang zwischen einer Kraft und der Bewegung des Massenpunktes beschreibt, wird sie auch als **Bewegungsgleichung** bezeichnet.

Im Strömungsfeld kann der Impuls eines größeren Flüssigkeitsbereichs zunächst nur für ein abgeschlossenes mitbewegtes Volumen  $V(t)$  mit

$$\mathbf{I} = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \quad (4.8)$$

abgeleitet werden. Für ein beliebiges raumfestes Kontrollvolumen  $V$  mit der Oberfläche  $S$  gilt dann für den Impulsstrom

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \iiint_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \iint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (4.9)$$

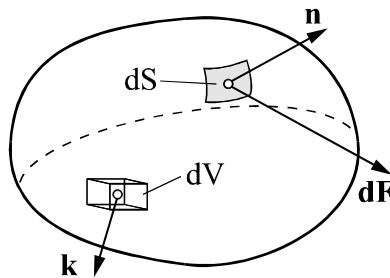
wobei die lokale Veränderung  $\partial\mathbf{I}/\partial t$  über das gesamte Kontrollvolumen ermittelt werden muss, während beim zweiten Term der rechten Seite der Volumenstrom  $dQ = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$  über

den freien Rand der Kontrollfläche erfasst wird. Die Kontrollfläche besteht allgemein aus einem festen Anteil, wenn sie mit einer Berandung zusammenfällt, und einem freien Anteil, der sich im Strömungsfeld befindet.

Für den Sonderfall der stationären Strömung entfällt der zeitabhängige Term auf der rechten Seite. Dann gilt für den Impulsstrom

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \iint_S \rho \mathbf{v} dQ \quad (4.10)$$

Im Gegensatz zur Einzelkraft des Massenpunktes der Festigkeitsmechanik sind im Strömungsfeld für das betrachtete Kontrollvolumen grundsätzlich zwei Arten von Kräften anzusetzen. Zum einen sind dies die **Volumen-** oder **Massenkräfte**, welche auf jedes einzelne Flüssigkeitsteilchen innerhalb des Kontrollvolumens wirken (Abb. 4.5).



**Abb. 4.5:** Volumen- und Oberflächenkräfte

Deren wichtigster Vertreter ist die Schwerkraft infolge der Erdbeschleunigung. Daneben sind allerdings auch die sog. **Scheinkräfte** zu beachten, wenn die Bewegung auf ein beschleunigtes Bezugssystem bezogen wird. Die in der Anwendung wichtigste Scheinkraft ist die Zentrifugalkraft bei der Bewegung auf einer gekrümmten Bahn. Allgemein wird der auf die Masse eines Flüssigkeitsteilchen innerhalb des betrachteten Volumens wirkende Vektor der Massenkraft mit **k** bezeichnet.

Zum anderen werden auf das betrachtete Flüssigkeitsvolumen **Oberflächenkräfte** von der umgebenden Flüssigkeit ausgeübt. Die dabei auf ein beliebiges Element  $dS$  der Oberfläche wirkenden Kraft  $dF$  resultiert aus dem im Strömungsfeld veränderlichen Spannungszustand, und stellt für jedes betrachtete Element eine vom Ort und der Zeit abhängige Größe dar. Der resultierende **Spannungsvektor t** ist auch von der Orientierung des betrachteten Flächenelements abhängig und ist i.a. nicht parallel zum Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Fläche. **Normalspannungen** entstehen durch die Projektion des Spannungsvektors auf die Flächennormale, in der Ebene senkrecht zu den Normalspannungen wirken die **Schubspannungen**.

Die Gesamtkraft auf das betrachtete Kontrollvolumen wird demnach durch die Integration über das Volumen und über dessen Oberfläche zu

$$\mathbf{F} = \iiint_V \rho \mathbf{k} dV + \iint_S \mathbf{t} dS \quad (4.11)$$

angegeben. Hierbei wurde gleich auf das ortsfeste Kontrollvolumen bezogen, da im Hinblick auf die Kräfte nicht zwischen dem bewegten und dem ortsfesten Volumen zu unterscheiden ist. Somit nimmt der Impulssatz in seiner integralen Form folgendes Aussehen an

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \iint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \rho \mathbf{k} dV + \iint_S \mathbf{t} dS \quad (4.12)$$

Für die stationäre Strömung verschwindet das Volumenintegral auf der linken Gleichungsseite. Damit ist nur noch der Impulsstrom durch die freien Ränder des Kontrollvolumens anzusetzen. In einer Reihe von Anwendungsfällen, z. B. in der Strahlhydraulik oder bei der Umströmung von Körpern, ist in erster Linie die Kraft von Interesse, welche vom Impulsstrom ausgelöst wird. Dann kann der Impulssatz in der Form

$$\iint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S \mathbf{t} dS \quad (4.13)$$

angeschrieben werden. Die große Bedeutung des Impulssatzes besteht darin, dass das Strömungsfeld im Innern des frei wählbaren Kontrollvolumens nicht bekannt sein muss. Durch die geschickte Wahl des Kontrollvolumens, das an den erforderlichen Angaben für die Verteilung der Oberflächenkräfte ausgerichtet wird, können auch ohne die Kenntnis der oft komplexen Strömungsvorgänge im Innern des betrachteten Volumens wertvolle Erkenntnisse gewonnen werden.

Dies weist bereits darauf hin, dass der Impulssatz meist in der hier wiedergegebenen integralen Form angewendet wird. Grundsätzlich ist auch eine Angabe in der differentiellen Form möglich. Voraussetzung dafür ist, dass eine Stetigkeit der Terme der einzelnen Integrale gegeben ist. Dann können die beiden Oberflächenintegrale nach dem Gaußschen Satz in Volumenintegrale umgewandelt werden. In der Schreibweise

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} - \sum \mathbf{F} = 0 \quad (4.14)$$

kann dann auf ein beliebig kleines Volumen bezogen werden, so dass schließlich ein Ausdruck

$$\iiint_V \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{k} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right) dV = 0 \quad (4.15)$$

entsteht. Darin wird mit  $\boldsymbol{\tau}$  der Spannungstensor bezeichnet, der sich aus dem Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  errechnet. In diesem Spannungstensor verkörpern die Elemente der Hauptdiagonalen die Normalspannungen, die Kreuzterme die Schubspannungen. Für  $dV \rightarrow 0$  ist dann mit

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{k} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (4.16)$$

die differentielle Darstellungsform des Impulssatzes gewonnen, welche allgemein als die **Cauchysche Bewegungsgleichung** bekannt ist. Ähnlich wie bei der integralen Form ausge-

führt, sind auch hier je nach den vorliegenden Strömungsverhältnissen Vereinfachungen möglich.

Bei der Formulierung des Impulssatzes wurde bisher vorausgesetzt, dass als Bezugssystem ein raumfestes Inertialsystem gewählt wurde. Ein Strömungsfeld, das relativ zu diesem Inertialsystem eine Beschleunigung erfährt, unterliegt nicht mehr diesen Gesetzmäßigkeiten. Eine Beschleunigung ruft hierbei Trägheitskräfte hervor, welche berücksichtigt werden müssen. Beispielsweise sei hier erneut an den mit Wasser gefüllten rotierenden Zylinder erinnert, in welchem für den mitrotierenden Beobachter das Wasser unbewegt bleibt, für den Beobachter von außen jedoch die Rotation wahrgenommen wird. Die zu beobachtenden Geschwindigkeiten hängen somit vom Bezugssystem ab. In vielen technischen Anwendungen, z.B. bei den rotierenden Wasserkraftmaschinen, ist es zweckmäßig, die Bewegung im beschleunigten System zu untersuchen.

Hierbei ist zu unterscheiden zwischen der **Absolutgeschwindigkeit**  $v_a$  im Inertialsystem und der **Relativgeschwindigkeit**  $v_r$  im beschleunigten System. Der Unterschied zwischen beiden gibt die Führungsgeschwindigkeit  $v_f$  wieder, mit welcher sich der Ursprung des Koordinatensystems bewegt. Bei den Kräften sind die daraus resultierenden Beschleunigungen zu beachten. Für die Anwendung im Bauingenieurwesen wichtig sind insbesondere die Beschleunigungen bei der Bewegung auf gekrümmten Bahnen und die Behandlung von Störungen mit einer zugehörigen Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Bei der Bilanzierung am Kontrollvolumen gilt, dass der Überschuss an austretendem Impulstrom über den eintretenden durch die Summe einwirkenden Kräfte hervorgerufen werden muss.

Als Beispiel für eine stationäre Strömung wird als Kontrollvolumen ein Abschnitt einer Stromröhre betrachtet (Abb. 4.6).

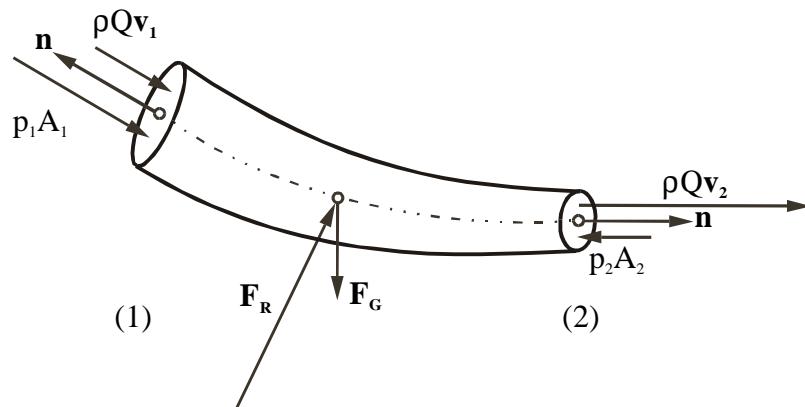


Abb. 4.6: Impulsströme und Kräfte im Bereich einer Stromröhre

Ein Volumenstrom ist nur im Bereich der freien Ränder durch die Schnittflächen  $A_1$  und  $A_2$  möglich. Es gilt dann nach den Gln. 4.14 und 4.10

$$\sum \mathbf{F} = \int_{A_2} \rho v_2 dQ + \int_{A_1} \rho v_1 dQ$$

Bei der Summe der äußeren Kräfte  $\Sigma F$  müssen angesetzt werden:

- |                    |  |
|--------------------|--|
| – Eigengewicht     | $\mathbf{F}_G$                                 |
| – Druckkräfte      | $-p_1 \mathbf{n}_1 A_1; -p_2 \mathbf{n}_2 A_2$ |
| – Widerstandskraft | $\mathbf{F}_W$                                 |
| – Reaktionskraft   | $\mathbf{F}_R$                                 |

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_G - p_1 \mathbf{n}_1 A_1 - p_2 \mathbf{n}_2 A_2 + \mathbf{F}_w = \rho Q (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad (4.17)$$

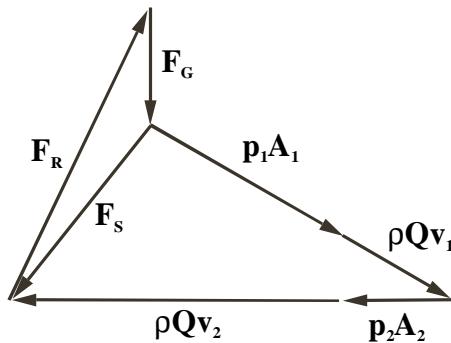
Die Impulsströme stellen vektorielle Größen dar und haben als solche die gleichen Richtungen wie die Geschwindigkeiten, durch welche sie geprägt werden (s. Abb. 4.6). Da für den Impulssatz analog zur Kontinuitätsbetrachtung die Bilanzierung der Impulsströme notwendig ist, zählt der in das Kontrollvolumen eintretende Impulsstrom  $\rho Q \mathbf{v}_1$  negativ (Gl. 4.17). Von der Dimension her haben die Impulsströme die Dimension einer Kraft (nicht jedoch von der Bedeutung!), die Impulsgleichung lässt sich daher auch in eine Gleichgewichtsbetrachtung umschreiben. Hierzu werden die Impulsströme mit umgekehrten Vorzeichen auf die linke Seite gebracht. Gl. 4.17 wird dann zu

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_G + \underbrace{(-p_1 \mathbf{n}_1 A_1) + \rho Q \mathbf{v}_1}_{\mathbf{F}_{S1}} + \underbrace{(-p_2 \mathbf{n}_2 A_2) - \rho Q \mathbf{v}_2}_{\mathbf{F}_{S2}} + \mathbf{F}_w = 0$$

Die Summe aus Druckkraft und dem negativen Anteil der Impulsstrombilanz in einem Querschnitt wird in der Bauingenieurliteratur als die **Stützkraft  $F_S$**  bezeichnet. Die Stützkraft ist immer zum Querschnitt hin gerichtet. Dem Betrag nach ist sie von der Größe

$$F_S = p A + \rho Q v \quad (4.18)$$

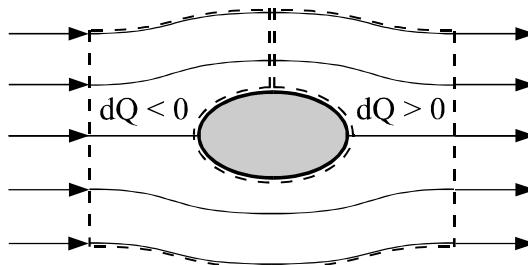
Für die reibungsfreie Strömung steht die Reaktionskraft mit der resultierenden Stützkraft und der Gewichtskraft im Gleichgewicht. Für die Verhältnisse an der betrachteten Stromröhre wird mit Hilfe der Stützkräfte die dargestellte Vektoraddition der einzelnen Kräfte erhalten. Die Widerstandskraft ist nicht berücksichtigt (Abb. 4.7). Die Reaktionskraft entspricht der vom Auflager aufzunehmenden Kraft. Die Oberflächenkräfte an festen Rändern des Kontrollvolumens wie Widerstands- oder Druckkräfte sind bei der Bilanzierung stets als Reaktionskräfte anzusetzen.



**Abb. 4.7:** Vektoraddition der Impulsströme und Kräfte aus Abb. 4.6

Hauptanwendung des Impulssatzes ist die Berechnung der Kraftwirkung auf umströmte Körper. Hierbei ist es wichtig, die Kontrollfläche zweckmäßig zu wählen (Abb. 4.8).

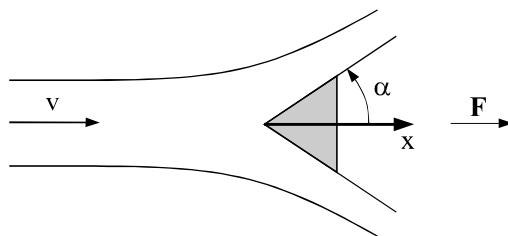
Der freie Rand der Kontrollfläche wird dabei möglichst längs einer Stromlinie gewählt, so dass hier  $Q = 0$ . Durch den Einbezug der Oberfläche des umströmten Körpers kann die Oberflächenkraft als äußere Kraft mit erfasst werden. Auch am festen Rand der Kontrollfläche längs der Körperoberfläche ist im allgemeinen  $Q = 0$ .



**Abb. 4.8:** Kontrollfläche bei einem umströmten Körper

**Beispiel 4.3:** Anwendung des Impulssatzes zur Berechnung der Kraftwirkung eines Freistrahls (Abb. 4.9):

$$-\rho Qv + 2\rho \frac{Q}{2} v \cdot \cos \alpha = F$$



**Abb. 4.9:** Kraftwirkung eines Freistrahls auf einem Keil

Da  $\rho Q v \cos \alpha < \rho Q v$  ist, ist erwartungsgemäß die Reaktionskraft mit anderem Vorzeichen behaftet. Weiter gelten für

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$F = -\rho Q v$$

$$\alpha = 180^\circ$$

$$\cos \alpha = -1$$

$$F = -2\rho Q v$$

Bei den Turbinenschaufeln der Pelton-Turbine gilt:  $\alpha \rightarrow 180^\circ$

Bei dieser Freistrahlturbine bewegt sich die Turbinenschaufel relativ zur Anströmgeschwindigkeit: Relativgeschwindigkeit  $v - u$  mit  $u = \text{Schaufelbewegung}$   
Größte Leistung für  $u = v/2$

Nicht immer ist es möglich, bei der ebenen oder auch räumlichen Strömung die freien Ränder durch Stromlinien bzw. Stromröhren zu begrenzen. Wegen der vektoriellen Eigenschaften der einzelnen Kräfte ist es dann zweckmäßig, diese in ihre Komponenten zu zerlegen. Dies soll am Beispiel der ebenen Grenzschichtströmung (s. auch Kap. 5) verdeutlicht werden (Abb. 4.10). Durch die Reibung kommt es im Bereich der ebenen Platte zu einer Verringerung der Geschwindigkeit. In die durch ABCD gekennzeichnete Kontrollfläche tritt im Bereich AB wegen  $v_x = \text{const.}$  ein größerer Volumenstrom ein als bei CD austritt. Die Differenz  $dQ$  tritt demnach längs der Linie BD aus der Kontrollfläche aus.

Bei der Berechnung der zugehörigen Impulsströme ist zu beachten, dass die skalare Größe Massenstrom  $\rho Q$  mit der vektoriellen Größe Geschwindigkeit  $v$  multipliziert wird und die Richtung der zeitlichen Änderung des Impulses durch die Richtung der betrachteten Geschwindigkeitskomponente festgelegt wird.

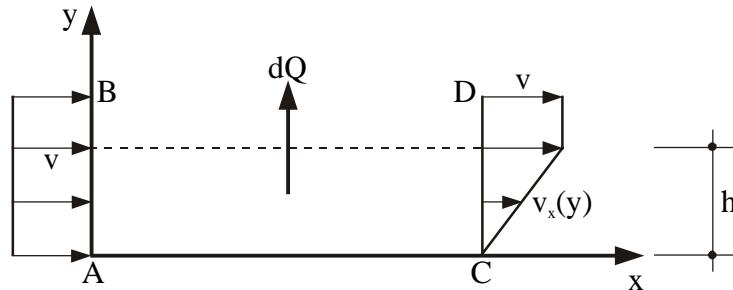


Abb. 4.10: Impulssatzanwendung auf die Grenzschichtströmung

Die Bilanzierung der x-Komponente des Impulsstroms für die angegebene Kontrollfläche wird dann

$$-\rho Q v_x + \rho dQ v_x + \rho (Q - dQ) \frac{1}{h} \int_0^h v_x(y) dy = \frac{dI_x}{dt} \quad (4.19)$$

Über die Berandung BD wird wegen der dort auftretenden Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung auch eine y-Komponente des Impulsstroms erzeugt. Allgemein gilt für die skalare Größe Massenstrom  $\rho Q$  durch das Flächenelement  $dA$

$$\rho dQ = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (4.20)$$

Die zugehörigen Komponenten der Impulsströme sind im ebenen Fall

$$\begin{aligned} \frac{dI_x}{dt} &= \rho \iint_{A_x} v_x dQ \\ \frac{dI_y}{dt} &= \rho \iint_{A_y} v_y dQ \end{aligned} \quad (4.21)$$

Bei der eindimensionalen Betrachtung an der Stromröhre wurde mit der mittleren Geschwindigkeit  $v$  gearbeitet. Ähnlich wie der Korrekturfaktor für die Geschwindigkeitshöhe  $\alpha$  (s. Kap. 4.3.4) ist zur Korrektur des Impulsstroms ein Korrekturfaktor  $\bar{\alpha}$  für die ungleichförmige Geschwindigkeitsverteilung ableitbar. Eine Geschwindigkeitsverteilung mit der örtlichen Geschwindigkeit  $u$  wird berücksichtigt durch

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{v^2 A} \iint_A u^2 dA \quad (4.22)$$

Ein derartiges Vorgehen ist nur sinnvoll, wenn tatsächlich die Geschwindigkeitsverteilung bekannt ist. Später (Kap. 4.3.2) wird nachgewiesen, dass bei turbulenten Strömungen auch die Geschwindigkeitsschwankungen Einfluss nehmen auf die Größe des Impulsstroms. Die Einführung des Korrekturfaktors allein wird der eigentlichen Problematik nur teilweise gerecht.

#### 4.1.3 Das Gesetz für die Energieerhaltung bei der Flüssigkeitsbewegung

Wenn von der Energieerhaltung gesprochen wird, so kann sich dies nur auf die gesamte Energie, also auf die Summe von mechanischer Energie und Wärmeenergie (innerer Energie) beziehen. Tatsächlich wird der Strömung durch die unvermeidbare Reibung auch mechanische Energie entzogen und in Wärme umgewandelt. Für die Energiebilanz gilt folgender Erfahrungssatz: Die zeitliche Änderung der gesamten Energie eines Körpers ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte plus der pro Zeiteinheit von außen zugeführten Energie.

Bei der Bewegung von Flüssigkeiten ist die kinetische Energie von besonderem Interesse. Bei der Gesamtenergie eines Flüssigkeitsteilchens wird daher unterschieden zwischen der inneren Energie  $E$  und der kinetischen Energie, welche in dem mit der Strömung bewegten Flüssigkeitsvolumen  $V(t)$  zu

$$K = \iint_{V(t)} \frac{v^2}{2} \rho dV \quad (4.23)$$

berechnet wird. Die Leistung der äußeren Kräfte kann anhand der unter Ziff. 4.1.2 definierten Oberflächen- und Volumenkräfte berechnet werden. Für die Oberflächenkraft  $t dS$  ist die zugehörige Leistung  $v \cdot t dS$ , entsprechend ist für die Volumenkraft  $\rho k dV$  die Leistung  $v \cdot \rho k dV$ . Die Gesamtleistung der äußeren Kräfte am Kontrollvolumen ist daher

$$P = \iiint_{V(t)} \rho v \cdot k dV + \iint_{S(t)} v \cdot t dS \quad (4.24)$$

Die von außen zugeführte Energie kann durch einen Wärmestrom  $\dot{Q}_w$  beschrieben werden, bei dem im Vergleich zum Volumenstrom anstelle der Geschwindigkeit die einfließende Energie betrachtet wird. Der Satz für die Energieerhaltung lautet dann

$$\frac{d}{dt} (K + E) = P + \dot{Q}_w \quad (4.25)$$

Wichtig an diesem Energieerhaltungssatz ist, dass eine direkte Beziehung zwischen der Energieänderung und den äußeren Kräften formuliert wird. Unter Kap. 4.1.2 wurde bereits auf den

Zusammenhang zwischen dem Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  und dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  hingewiesen. Die Schubspannungen in diesem Tensor, also die nichtdiagonalen Terme des Tensors, verrichten eine irreversible Arbeit. Die durch die Reibung hervorgerufenen Spannungen führen zur irreversiblen Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme. Die dabei erzeugte Deformationsarbeit pro Zeit- und Volumeneinheit wird als die **Dissipationsfunktion** bezeichnet.

Die Wärmeströme infolge der Reibung sind allerdings wegen der hohen spezifischen Wärme des Mediums Wasser so gering, dass nur minimale Temperaturunterschiede nachweisbar sind. Lediglich beim Abfluss mit sehr hohen Geschwindigkeiten, z.B. in Kavitationsständen zur Untersuchung des Phänomens der Kavitation (Kap. 2), sind messbare Temperaturerhöhungen beim Betrieb der Versuchsstände zu beobachten.

## 4.2 Erfassung der Oberflächenkräfte

Die bisher behandelten Erhaltungssätze reichen zur Beschreibung einer Strömung nicht aus, da die Zahl der verfügbaren Gleichungen kleiner ist als die der unbekannten Funktionen. Da das Flüssigkeitsteilchen bei der Bewegung verformt wird, fehlen noch Gleichungen, welche diese Deformation in eine Beziehung zu dem Material setzen, aus dem das Flüssigkeitsteilchen besteht. Aus diesem Grund werden diese Gleichungen **Materialgleichungen** genannt.

Aus Kap 1.3 sind als maßgebliche Eigenschaften von Flüssigkeiten bereits deren dynamische Zähigkeit  $\eta$  und die Dichte  $\rho$  bekannt, deren Quotient die kinematische Zähigkeit  $v = \eta/\rho$  darstellt. Mit Hilfe der kinematischen Zähigkeit wird über die sog. **Reynolds-Zahl**  $Re$ , die wichtigste dimensionslose Kennzahl der Strömungsmechanik, ein Bezug zu den Abmessungen des Strömungsfeldes in Gestalt einer charakteristischen Länge  $l$  und zu der im Strömungsfeld vorhandenen Geschwindigkeit  $v$  geschaffen. Berechnet wird die Reynolds-Zahl zu

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} \quad (4.26)$$

In dieser Form lässt die Reynolds-Zahl verschiedene Deutungen zu. Meist wird sie als das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Widerstandkräften definiert. Ebenso kann sie als das Verhältnis vom konvektiven Impulstransport zum diffusiven angesehen werden. Schließlich stellt sie auch noch das Verhältnis der charakteristischen Länge  $l$  zur sog. viskosen Länge  $\nu/v$  dar. Formal wird der Wert der Reynolds-Zahl sehr hoch, wenn die Abmessungen des Strömungsfeldes groß sind. So errechnet sich für eine charakteristische Länge  $l = 1 \text{ m}$  und eine mittlere Geschwindigkeit  $v > 1 \text{ m/s}$  für das Fluid Wasser eine Reynolds-Zahl  $Re > 10^6$ . Andererseits können hohe Reynolds-Zahlen auch für  $v \rightarrow 0$  erreicht werden.

Tatsache ist, dass sich die sog. **laminare** Strömung, bei welcher die Zähigkeit dominiert, i.a. nur unterhalb von bestimmten Reynolds-Zahlen ausbildet. Oberhalb dieser kritischen Reynolds-Zahl stellt sich eine völlig andere Strömung ein, bei welcher Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen im Strömungsfeld auftreten, welche zufälliger Natur sind. Derartige Strömungen werden als **turbulent** bezeichnet. Dieser Umstand bedingt, dass je nach Art der Strömung auch unterschiedliche Materialgleichungen benötigt werden.

### 4.2.1 Laminare Strömung

Die Oberflächenkräfte an einem betrachteten Volumenelement werden über den Spannungszustand ermittelt, welcher durch den Spannungstensor  $\tau_{ji}$  beschrieben wird. Da infolge des hydrostatischen Drucks auch in der ruhenden Flüssigkeit Normalspannungen vorhanden sind, ist es üblich, den Spannungstensor wie folgt aufzuspalten

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij} \quad (4.27)$$

Dabei kennzeichnet  $p$  den Druck und  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol, welches für  $i=j$  den Wert  $\delta_{ij}=1$  annimmt. Für die mittlere Normalspannung gilt dann

$$\bar{p} = \frac{1}{3} \tau_{ii} \quad (4.28)$$

Diese ist im bewegten Strömungsfeld im allgemeinen ungleich dem negativen Druck. Mit  $\tau'_{ij}$  ist der Reibungsspannungstensor gekennzeichnet. Dies ist derjenige Anteil des Spannungstensors, welcher die Scherung der Fluidelemente bewirkt. Er kann aus diesem Grund nur mit dem symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten-Tensors nach Gl. (3.7) zusammenhängen. Mit Gl (1.3) wurde für die zweidimensionale Bewegung ein linearer Zusammenhang zwischen der Schubspannung und dem Geschwindigkeitsgradienten für die Newtonschen Fluide vorgestellt. Im allgemeinen Fall der dreidimensionalen inkompressiblen laminaren Strömung einer Newtonschen Flüssigkeit bleibt diese lineare Abhängigkeit von der dynamischen Zähigkeit erhalten. Die Reibungsspannungen können deshalb durch die Gleichung

$$\tau'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.29)$$

wiedergegeben werden. Bei kompressiblen Flüssigkeiten ist neben der dynamischen Zähigkeit noch die von der Kompression abhängige Druckzähigkeit zu beachten. Für nicht-Newtonsche Flüssigkeiten sind diese einfachen linearen Zusammenhänge nicht mehr gültig.

### 4.2.2 Turbulente Strömung

Die turbulente Strömung unterscheidet sich wesentlich von der laminaren dadurch, dass neben der viskosen Reibung, welche auf die Schwingungen der einzelnen Moleküle beruht, im Strömungsfeld zufällige Schwankungsbewegungen größerer **Flüssigkeitsballen** zu beobachten sind. Der Impuls austausch im molekularen Bereich wird überlagert durch denjenigen dieser von den Schwankungen erfassten Flüssigkeitsballen. Allein dies verdeutlicht, dass das Widerstandsverhalten durch das Phänomen Turbulenz erheblich beeinflusst wird.

#### 4.2.2.1 Schwankungsbewegungen

Bei ausreichendem Energiegehalt sind den zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeit  $\bar{v}$  Schwankungsbewegungen  $v'$  überlagert, so dass z. B. die Momentangeschwindigkeit  $v_x$  in x-Richtung erfasst wird durch

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x \quad (4.30)$$

Die ungeordneten Schwankungsbewegungen erzeugen durch den vermehrten Impulstransport zusätzliche Normal- und Schubspannungen, welche als scheinbare Spannungen der turbulenten Strömung bezeichnet werden. Mit Hilfe des Ansatzes von Boussinesque wird analog zum Newtonschen Reibungsgesetz für die turbulente Bewegung

$$\tau_t = A_t \frac{d\bar{v}}{dn} \quad (4.31)$$

formuliert. Der kinematischen Zähigkeit  $\nu = \eta/\rho$  ist deshalb eine "scheinbare" kinematische Zähigkeit

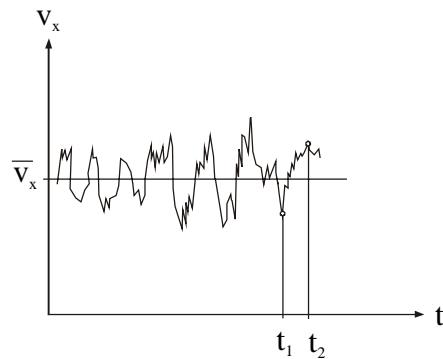
$$\epsilon_t = \frac{A_t}{\rho} \quad (4.32)$$

zugeordnet, wobei  $\epsilon_t$  im Gegensatz zu  $\nu$  keine physikalische Eigenschaft des Fluids ist. Der mit Gleichung (4.31) geschilderte Zusammenhang ist zunächst rein formal und muss durch die Turbulenzeigenschaften ausgedrückt werden. Die Schwankungsbewegungen sind zeitabhängig, so dass eine turbulente Strömung grundsätzlich nur bezüglich ihrer zeitlichen Mittelwerte als stationär angesehen werden kann.

Der zeitliche Mittelwert der Strömung wird durch eine Integration über den Momentanwert  $v_x$  über einen ausreichend großen Zeitraum  $\Delta t$  gewonnen (Abb. 4.11).

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v_x \, dt \quad \text{für} \quad \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} \rightarrow 0 \quad (4.33)$$

wobei der zeitliche Mittelwert der Schwankungsbewegung  $\bar{v}'_x$  voraussetzungsgemäß Null sein muss.



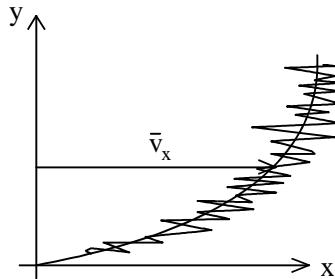
**Abb. 4.11:** Turbulente Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$

Die Stärke der Schwankungen wird deshalb durch  $\sqrt{(v'_x)^2}$  angegeben.

Für den verstärkten Impulstransport quer zur Strömungsrichtung sind die Schwankungsbewegungen verantwortlich. In einer ebenen Strömung in x-Richtung gilt (Abb. 4.12)

$$\bar{v}_x = \bar{v}_x(y) \quad \text{und} \quad v_x'; v_y'; v_z' \\ \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$$

Maßgeblich für den Impulstransport und damit für die scheinbaren Schubspannungen ist der zeitliche Mittelwert des Produktes der Schwankungsbewegungen.



**Abb. 4.12:** Momentane Geschwindigkeitsverteilung einer ebenen Strömung in x-Richtung

So gilt z.B. für die in Abb. 4.12 gezeigte ebene Bewegung

$$\tau_{xy} = -\rho \bar{v}_x' v_y' \quad (4.34)$$

Da selbst in diesem ebenen Strömungsfeld die Schwankungsbewegungen in allen drei Koordinatenrichtungen auftreten, sind die sog. Reynolds-Spannungen in allgemeingültiger Form darzustellen, wozu hier auf die Zeigerschreibweise zurückgegriffen wird. Es gelten allgemein

$$\tau_{ij} = -\rho \bar{v}_i' v_j' \quad (4.35)$$

Sind für einen Punkt des Strömungsfeldes die Schwankungskomponenten bekannt, so kann damit die scheinbare kinematische Zähigkeit  $\epsilon_t$  nach dem Boussinesque-Ansatz wegen

$$\tau_{ij} = \rho \epsilon_t \frac{d\bar{v}_i}{dx_j} \quad (4.36)$$

berechnet werden. Neben diesem rein formalen Ansatz in Anlehnung an die Formulierung des Widerstandsverhaltens der laminaren Strömung, wird stellvertretend für viele Ansätze der Prandtlsche Mischungsweg vorgestellt, bei dem die Schwankungsbewegungen im Strömungsfeld berücksichtigt werden.

#### 4.2.2.2 Prandtlscher Mischungsweg

Ein Flüssigkeitsballen aus der Schicht ( $y_1 - l$ ) mit der Geschwindigkeit  $v_x(y_1-l)$  bewegt sich unter Beibehaltung seines x-Impulses quer zur Hauptströmungsrichtung (Abb. 4.13).

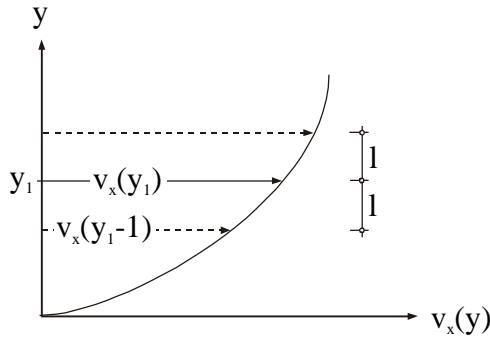


Abb. 4.13: Prandtlscher Mischungsweg

In der Schicht  $y_1$  hat er eine kleinere Geschwindigkeit als seine Umgebung, so dass

$$\Delta v_{x_1} = v_x(y_1) - v_x(y_1 - 1) \approx 1 \cdot \left( \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)_1$$

Da der Flüssigkeitsballen in Richtung der  $y$ -Achse bewegt wird, ist dabei  $v'_y > 0$ . Für den umgekehrten Weg eines Flüssigkeitsballens von der Schicht  $(y_1 + l)$  gilt

$$\Delta v_{x_2} = v_x(y_1 + l) - v_x(y_1) \approx 1 \cdot \left( \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)_1$$

wobei hier  $v'_y < 0$  ist. Die durch die Querbewegungen verursachten Geschwindigkeitsunterschiede  $\Delta v_{x_1}$  und  $\Delta v_{x_2}$  können also turbulente Schwankungsbewegungen der Schicht  $y_1$  aufgefasst werden, deren zeitlicher Mittelwert

$$\left| \bar{v}'_x \right| = \frac{1}{2} \cdot (\Delta v_{x1} + \Delta v_{x2}) = 1 \cdot \left| \left( \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)_1 \right|$$

ist. Die Größe  $l$  ist der **Mischungsweg** nach L. Prandtl. Seine physikalische Bedeutung: Ein Fluidballen muss den Mischungsweg  $l$  zurücklegen, bis der Unterschied zwischen seiner ursprünglichen Geschwindigkeit und derjenigen des neuen Ortes gleich der mittleren Schwankung der Längsgeschwindigkeit ist. Treffen zwei Fluidballen in der Schicht  $y_1$  so zusammen, dass der schnellere  $v_x(y_1 + l)$  hinter dem langsameren  $v_x(y_1 - l)$  ist, so stoßen beide mit der gleichen Geschwindigkeit  $2 \cdot v'_x$  zusammen. Sie erzeugen damit eine Querbewegung zur Schicht  $y_2$ . Gelangen dagegen beide Flüssigkeitsballen in der umgekehrten Reihenfolge hintereinander, so entfernen sie sich voneinander und der Zwischenraum muss von der Umgebung aufgefüllt werden, so dass eine Querbewegung zur Schicht  $y_1$  erfolgt. Beide Schwankungskomponenten  $v_x'$  und  $v_y'$  sind somit von gleicher Größenordnung, wobei ein  $v_y' > 0$  ein  $v_x' < 0$  erzeugt und umgekehrt. Allgemein ist daher

$$\overline{v'_x v'_y} = -l^2 \left( \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2 \quad (4.37)$$

und die turbulente Schubspannung, die mit dem Vorzeichen von  $d\bar{v}_x / dy$  korreliert ist, führt zu

$$\tau_{xy} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \quad (4.40)$$

Diese Gleichung ist die Prandtlsche **Mischungswegformel**. Sie steht für einen von vielen theoretischen Ansätzen zur Berechnung von turbulenten Strömungen. Unbekannt in der Mischungswegformel ist die Größe  $l$  des Mischungsweges. Für eine Reihe von Strömungen kann der Mischungsweg als eine Funktion des Ortes bestimmt werden. Wichtigstes Beispiel dafür ist die Rohrströmung, welche auch in ihrer Turbulenzstruktur voll erfasst ist.

Die im Innern der Strömung erzeugten Schubspannungen müssen wegen des Kräftegleichgewichtes über die Wandschubspannung  $\tau_0$  in Form eines Reibungswiderstandes abgetragen werden. In der Rohrströmung ist z. B. wegen  $d\bar{v}_x / dy = 0$  in Rohrachse die Schubspannung gleich Null und erreicht an der Wand mit  $\tau_0$  ihr Maximum. In der turbulenten Strömung sind wegen der Haftbedingung an der Wand auch die Schwankungskomponenten in unmittelbarer Wandnähe Null. In der Nähe der Wand ist daher, zumindest bei einer glatten Wand, nach wie vor auch die Zähigkeit wirksam, so dass ganz allgemein gilt

$$\tau_{xy} = \tau_l + \tau_t = \eta \frac{d\bar{v}_x}{dy} - \rho \overline{v'_x v'_y} \quad (4.41)$$

oder aber unter Verwendung der kinematischen Zähigkeiten

$$\tau_{xy} = \rho v \frac{d\bar{v}_x}{dy} + \rho \epsilon_t \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (4.42)$$

Durch Geschwindigkeitsgradienten kommt es zum Impulsaustausch. Im Mikrobereich (molekular) ist für die innere Reibung die Zähigkeit, im Makrobereich (Flüssigkeitsballen) der durch die turbulenten Schwankungsbewegungen verstärkte Impulsaustausch maßgebend. Diese werden allein durch die Eigenschaften des Strömungsfeldes bestimmt und sind deshalb nur durch entsprechende Modellvorstellungen quantifizierbar. Eines der bekanntesten Turbulenzmodelle ist das sog.  $k-\epsilon$ -Modell, bei welchem die kinetische Energie  $k$  der turbulenten Schwankungsbewegungen mit der viskosen Dissipation  $\epsilon$  von turbulenter kinetischer Energie in einem sog. Zwei-Gleichungs-Modell in Beziehung gesetzt wird. Ein Materialgesetz ähnlich dem für die laminare Strömung ist deshalb für die turbulente Strömung nicht verfügbar.

Im Kapitel 5 wird gezeigt, wie es trotz dieser Schwierigkeiten gelungen ist, auch das Verhalten von turbulenten Strömungen ausreichend genau zu erfassen. Dies gilt z. B. für die Strömung im Bereich einer festen Wand.

### 4.3 Bewegungsgleichungen

Durch die Kombination der Erhaltungssätze mit den Materialgesetzen entstehen die auf dem Impulssatz beruhenden speziellen Bewegungsgleichungen. Hier wird auf die wichtigsten dieser Gleichungen eingegangen. Im Hinblick auf die bereits geschilderten Probleme mit der turbulenten Strömung wird Wert auf das Aufzeigen der Grenzen für die Anwendbarkeit gelegt.

### 4.3.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die differentielle Form des Impulssatzes in Gestalt der Cauchyschen Bewegungsgleichung (4.16)

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{k} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

in welcher der zweite Term der rechten Gleichungsseite mit den partiellen Ableitungen aller Spannungen nach den drei Koordinatenrichtungen durch ein verfügbares Materialgesetz zu ersetzen ist. Dies liegt in Gestalt der Gl. 4.29 nur für die laminare Strömung vor. Darin werden allerdings nur die Reibungsspannungen in Abhängigkeit von den Geschwindigkeitsgradienten dargestellt. Deswegen ist noch die mit Gl. 4.27 vorgenommene Aufspaltung in die Normal- und Reibungsspannungen vorzunehmen. Dies führt zu

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{k} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'_{ij} \quad (4.43)$$

Durch die Ableitung des Reibungsspannungsterms verbleiben für die inkompressible Strömung wegen  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  nur die zweiten Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten, so dass nach Umformung die Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + v \Delta \mathbf{v} \quad (4.44)$$

erhalten werden kann. Beim letzten Term der rechten Gleichungsseite ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  mit dem Laplaceschen Operator verknüpft. Gl. 4.44 sind die **Navier-Stokes-Gleichungen** für die inkompressible laminare Strömung. In ihr sind neben dem Vektor der auf die Masseneinheit bezogenen Volumenkraft nur noch die Funktionen des Strömungsfeldes mit den unabhängigen Veränderlichen der Zeit und des Raumes verknüpft. Den vier Unbekannten  $\mathbf{v}$  und  $p$  stehen hier die drei Gleichungen für die jeweiligen Richtungen gegenüber. Die vierte Gleichung liefert die Kontinuitätsbedingung in Gestalt von Gl. 4.5. Leider gibt es im Bereich des Bauingenieurwesens nur wenige Sonderfälle, welche eine Anwendung der Gl. 4.44 zulassen. In Kap. 5 werden Lösungen für die Spaltströmung vorgestellt.

Die Lösungsmöglichkeit von Gl. 4.44 für räumliche Strömungen wird besonders durch die nichtlinearen Terme der konvektiven Beschleunigung erschwert. Für sehr kleine Reynoldszahlen ist allerdings die Wirkung der Trägheitskräfte gegenüber den durch die Zähigkeit ausübten Reibungskräften vernachlässigbar. Für diesen Sonderfall kann die linke Gleichungsseite gleich Null gesetzt werden. Dies erleichtert die Lösung der Dgl. wesentlich.

Angesichts der Schwierigkeiten mit der Modellierung der Turbulenzeigenschaften wurde die Navier-Stokes-Gleichungen durch die Erhöhung der kinematischen Zähigkeit um einige Zehnerpotenzen für die Berechnung turbulenter Strömungen eingesetzt. Dies bedeutet allerdings, dass im gesamten Strömungsfeld eine isotrope Turbulenzstruktur vorliegen muss, was nur näherungsweise zutrifft.

### 4.3.2 Reynolds-Gleichungen

Setzt man in die Navier-Stokes-Gleichungen die Mittelwerte für die Geschwindigkeiten der turbulenten Strömung ein, so können die Terme durch die Mittelwerte ersetzt werden. Bei den nichtlinearen Termen fallen allerdings die zeitlichen Mittelwerte der Produkte der einzelnen Schwankungskomponenten nicht heraus. Unter Ziff. 4.2.2 wurden diese Größen bereits als turbulente Schubspannungen angeführt. Wegen der Verknüpfung der Mittelwerte und der Schwankungskomponenten sind die daraus resultierenden Gleichungen in Zeigerschreibweise wiedergegeben. Sie lauten

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = k_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{v}'_i \bar{v}'_j \right) \quad (4.45)$$

und werden als **Reynolds-Gleichungen** bezeichnet. Mit den Ableitungen der zeitlichen Mittelwerte der Produkte der Schwankungsgeschwindigkeiten entstehen weitere 9 Terme, von denen wegen der Symmetrie des sog. Reynolds-Spannungstensors allerdings nur 6 unbekannt sind. Sie zu eliminieren ist Aufgabe der Turbulenzmodelle. Dies verdeutlicht, welcher Aufwand getrieben werden muss, damit die turbulente Strömung überhaupt einer Berechnung zugänglich wird.

### 4.3.3 Eulersche Bewegungsgleichungen

Die **Eulersche Bewegungsgleichungen** sind ein Sonderfall von Gl. 4.44, der die reibungsfreie Strömung beschreibt. Hier werden die im Strömungsfeld normalerweise vorhandenen Schubspannungen vernachlässigt. Dann entfällt einfach der letzte Term in Gl. 4.44, sodass mit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \quad (4.46)$$

eine Form der Bewegungsgleichung erhalten wird, in welcher die Auswirkung der Viskosität auf den Strömungsvorgang keine Berücksichtigung findet. Dies erscheint zunächst widersinnig, da jede Flüssigkeit eine gewisse Zähigkeit aufweist. Auch hier muss jedoch darauf geachtet werden, welchen Einfluss die Reibung tatsächlich auf das Strömungsgeschehen nimmt. Es gibt viele Anwendungsfälle, bei denen die Wirkung der Reibung auf einen kleinen Bereich des Strömungsfeldes, z. B. in Wandnähe, beschränkt bleibt. Dann kann bei hohen Reynolds-zahlen sogar eine turbulente Strömung mit gutem Erfolg beschrieben werden. Dies gilt auch für die Anwendung der Potentialtheorie unter Kap. 6.

### 4.3.4 Bernoulli-Gleichung

Normalerweise wird die **Bernoulli-Gleichung** über die Integration der Eulerschen Gleichung längs einer Stromlinie hergeleitet. In diesem Fall ist die Bewegung auf die natürlichen Koordinaten bezogen, eine Geschwindigkeitskomponente liegt nur in Tangentenrichtung vor. Nach Gl. 3. 17 gilt für die Tangentialbeschleunigung

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

sodass wegen des Bezugs auf die Lagrangesche Methode der Beschreibung der Strömung anstelle der konvektiven Beschleunigungen nur noch die Ableitung des Quadrats der Geschwindigkeit nach der Richtung vorhanden ist. Dieser quadratische Term ist leicht mit der kinetischen Energie der Strömung zu verknüpfen, welche ja für das Massenelement  $dm$  durch

$$\frac{v^2}{2} dm \quad (4.47)$$

definiert ist. Dabei wird dann noch vorausgesetzt, dass die Massenkraft ein Potential hat. Dies wird der späteren Anwendung nicht vollständig gerecht, weil die Bernoulli-Gleichung auch auf Stromlinien übertragen wird, bei denen ein Verlust an mechanischer Energie zu verzeichnen ist. Im dreidimensionalen Strömungsfeld ist allgemein die konvektive Beschleunigung in Gl. 4.46 entsprechend der Gl. 3.12 wie folgt mit der auf die Masse bezogenen kinetischen Energie verknüpft

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2$$

Die Ausdehnung des Anwendungsbereichs auf das gesamte Strömungsfeld wird dann über die ebene Strömung der Potentialtheorie (Kap. 6) erreicht. Auch die Potentialtheorie ist voraussetzungsgemäß reibungsfrei. Demnach kann durch diese Ableitung der Schritt von der Stromlinie zum Strömungsfeld vollzogen werden. Auch hier werden jedoch die immer vorhandenen Verluste an mechanischer Energie nicht in die Überlegungen mit einbezogen. Häufig wird trotz dieser Herleitung über die reibungsfreie Strömung die Bernoulli-Gleichung als Energiegleichung bezeichnet. Auch dies ist nur unter Vorbehalten nachzuvollziehen, da mit der Bernoulli-Gleichung bestenfalls eine Bilanzierung der mechanischen Energie erreicht werden kann. Unter Ziff. 4.1.3 wurde das Gesetz für die Energieerhaltung unter Einbeziehung der inneren Energie beschrieben.

Sinnvoll wäre daher eine Ableitung über die Navier-Stokes-Gleichungen, da diese die konvektiven Beschleunigungen und die durch diese ausgelösten Reibungsspannungen enthalten. Für die turbulente Strömung wird durch die Reynolds-Spannungen im Prinzip nur die erhöhte innere Reibung dieser Strömungsart berücksichtigt. Die kinetische Energie eines Punktes im Strömungsfeld ist in diesem Fall indirekt in der Spur des Geschwindigkeitsgradienten-Tensors enthalten. Die kinetische Energie des Flüssigkeitsteilchens pro Masseneinheit ist dann über die Beziehung

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (4.48)$$

bestimbar. Eine Bilanzierung der Gesamtenergie ist mit den Navier-Stokes-Gleichungen dann in die Überlegungen mit einbezogen, da die Erzeugung der Reibungsspannungen und ihre irreversible Umwandlung in innere Energie in diesen Gleichungen berücksichtigt wird.

Die Überlegung mit der kinetischen Energie des Flüssigkeitsteilchens im Strömungsfeld weist bereits darauf hin, dass die drei Komponentendarstellungen miteinander verknüpft werden müssen, was angesichts Reibungsterme sehr unübersichtlich wird. Auch hier wird deshalb der einfache Weg der Ableitung über den Stromfaden bestritten, allerdings unter Hinweis auf die bereits getroffenen Anmerkungen, dass mit der Bernoulli-Gleichung eine über die einschränkenden Voraussetzungen hinausgehende Anwendung möglich ist. Dies erscheint angesichts

der überragenden Bedeutung gerade dieser Gleichung für das Verständnis der Strömung wichtig.

Ausgehend von den Eulerschen Bewegungsgleichungen nach Gl. 4.46

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = \mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

wird mit Hilfe der eindimensionalen Betrachtung der Beschleunigungsterme nach Gl. 3.17

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) = k_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (4.49)$$

Im Schwerefeld der Erde hat im Inertialsystem die Massenkraft das Potential  $\Phi = -gz$ , da die Erdbeschleunigung antiparallel zur Richtung der z-Achse ist. Da die räumliche Veränderung allein durch die natürliche Koordinate s beschrieben wird, kann die partielle Differentiation durch die totale ersetzt werden. Somit wird

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{d}{ds} (gz) - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} \quad (4.50)$$

Diese Gleichung kann, da nur noch von s und t abhängig, einfach längs der Stromlinie integriert werden. Dies führt zu dem Ergebnis

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.} \quad (4.51)$$

Wenn als Massenkraft allein die Schwerkraft auftritt und die Dichte als konstant angenommen wird, kann der vierte Term auf der linken Seite durch  $p/\rho$  ersetzt werden. In diesem Zusammenhang ist der Hinweis wichtig, dass mit der Bernoulli-Gleichung i.a. keine Aussage über den örtlichen Druck möglich ist. Besonders wichtig ist dies bei gekrümmten Strombahnen, da entsprechend Gl. 3.17a in der Normalenrichtung zusätzliche Beschleunigungen auftreten, demnach nicht mehr allein die Schwerkraft als Massenkraft einwirkt. Wird zwischen zwei Punkten 1 und 2 auf der Stromlinie integriert, dann gilt

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} = \text{const.} \quad (4.52)$$

Für die stationäre Strömung entfällt das Integral mit der lokalen Beschleunigung. Wird gleichzeitig durch die Erdbeschleunigung dividiert, dann nimmt die Bernoulli-Gleichung für jeden Ort der Stromlinie folgendes Aussehen an

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.} \quad (4.53)$$

Die Integrationskonstante der rechten Gleichungsseite wird als Bernoullische Konstante bezeichnet. Wird für sie die Bezeichnung H eingeführt, so ist

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H \quad (4.54)$$

Sämtliche Terme dieser Gleichung verkörpern skalare Größen und haben die Einheit einer Länge. Neben den bekannten Bezeichnungen  $z$  für die Ortshöhe und  $p/\rho g$  für die Druckhöhe werden  $v^2/2g$  als **Geschwindigkeitshöhe** und  $H$  als **Energiehöhe** bezeichnet. Die Summe aus Orts- und Druckhöhe  $z + p/\rho g$  wird **piezometrische Höhe** genannt. In der Grundwasserhydraulik ist hierfür die Bezeichnung der **Standrohrspiegelhöhe** gebräuchlich. Es ist diejenige Höhe, in welcher sich in einem vertikalen Standrohr mit einer Öffnung an der Unterseite, der Wasserspiegel im Grundwasserleiter einstellt.

Da nur noch skalare Größen in der Bernoulli-Gleichung (Gl. 4.54) erscheinen, muss der Zusammenhang mit den mechanischen Teilenergien noch einmal aufgezeigt werden. Ausgegangen wurde von den Eulerschen Bewegungsgleichungen (Gl. 4.46), in welcher ausschließlich Beschleunigungsterme der Einheit  $m^2/s$  aufgeführt sind. Da diese die am Volumenelement wirksamen Kräfte bzw. den Impulsstrom verkörpern, sind sie durch Division der Kräfte bzw. des Impulsstroms durch die Masse des Volumenelements entstanden. Es werden dabei demnach auf die Einheitsmasse bezogene Größen behandelt. Beim Übergang von Gl. 4.53 zu Gl. 4.54 wurde zudem durch die Erdbeschleunigung dividiert. Das bedeutet, dass sämtliche Terme der Bernoulli-Gleichung in der Schreibweise der Gl. 4.54 durch den Ausdruck  $mg$  dividiert worden sind. Multipliziert man die Ortshöhe  $z$  mit  $mg$ , so wird mit  $mg \cdot z$  die Lageenergie des betrachteten Flüssigkeitsteilchens, bei Betrachtung der Geschwindigkeitshöhe die kinetische Energie erhalten.

Die Druckhöhe wurde aus dem Druck  $p$  durch die Division durch das Produkt  $\rho g$  gewonnen. Wird die Geschwindigkeitshöhe  $v^2/2g$  ebenfalls mit  $\rho g$  multipliziert, dann wird mit

$$\rho \frac{v^2}{2} \quad (4.55)$$

der sog. **Staudruck** oder Geschwindigkeitsdruck erhalten.

**Beispiel 4.4:** In einer gleichförmigen Strömung mit der Geschwindigkeit  $v$  wird ein strömungsgünstig geformter Körper umströmt. Eingezeichnet sind im Abb. 4.14 die zugehörigen Stromlinien, welche an der Körpervorderseite einen singulären Punkt aufweisen, an dem sich die Stromlinie teilt. Zu bestimmen ist der Druckunterschied zwischen einem Punkt O im ungestörten Bereich des Strömungsfeldes und dem Punkt S an der Verzweigung der Stromlinien.

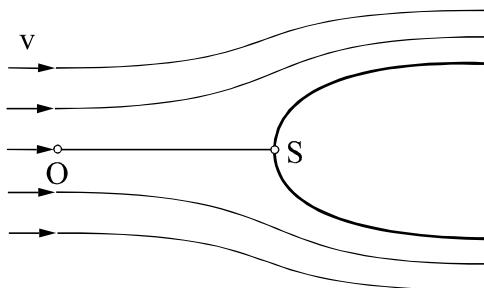


Abb. 4.14: Umströmung eines Körpers

Am Verzweigungspunkt weisen die Stromlinien eine vertikale Tangente auf, da die Flüssigkeit nach beiden Seiten abgelenkt wird. Im Punkt S muss daher die Geschwindigkeit gleich Null sein, da der Körper nicht durchströmt wird. Die Anwendung von Gl. 4.54 zeigt

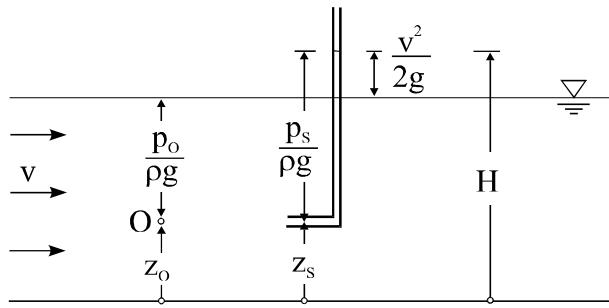
$$z_0 + p_0 / \rho g + v^2 / 2g = z_s + p_s / \rho g + 0$$

Wegen  $z_0 = z_s$  wird mit  $\Delta p = p_s - p_0$  schließlich

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{2}$$

Ein Vergleich mit Gl. 4.55 zeigt, dass dies genau dem Staudruck entspricht. Der Punkt S wird daher als **Staupunkt** bezeichnet.

**Beispiel 4.5:** Ein in einem rechten Winkel abgebogenes Röhrchen wird mit seiner offenen Vorderseite in eine strömendes Wasser gehalten. Dabei steigt der Wasserspiegel im Röhrchen über den Wasserspiegel am Messort an (Abb. 4.15). Wie ist dies zu erklären?



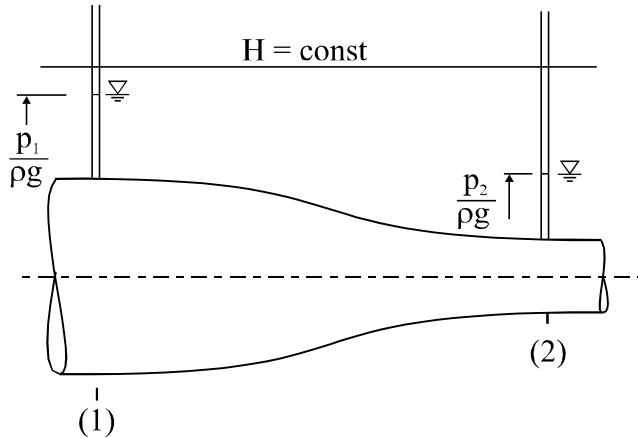
**Abb. 4.15:** Staurohr in einer Strömung mit freiem Wasserspiegel

An der offen Seite des Röhrchens wird wie im Beispiel 4.4 die Geschwindigkeit der Strömung  $v$  bis auf den Wert Null abgebremst, da das Hindernis umströmt werden muss. Im Gegensatz zum Beispiel 4.4 kann Wasser unmittelbar nach dem Einbringen in die Strömung in das Röhrchen einströmen. Das Wasser im Röhrchen steigt so lange an, bis der Druck an der offenen Vorderseite durch den hydrostatischen Druck ausgeglichen wird, der sich im Röhrchen aufbaut. Da neben dem Umgebungsdruck auf das Röhrchen noch der Staudruck wirkt, entspricht der Anstieg über den Wasserspiegel genau der Geschwindigkeitshöhe  $v^2/2g$  der Strömung. In ausreichender Entfernung vor dem Röhrchen entspricht die Druckhöhe auf Höhe der Achse des Röhrchens der Überdeckung mit Wasser. Sie wird demnach durch den Wasserspiegel angezeigt. Gleichzeitig ist an diesem Punkt, der wieder mit O bezeichnet wird, die ungestörte Geschwindigkeit  $v$  vorhanden. Ein Energiehöhenvergleich bringt folgenden Zusammenhang:

$$z_0 + p_0 / \rho g + v^2 / 2g = z_s + p_s / \rho g + 0 = H$$

In dem Röhrchen wird demnach die Energiehöhe angezeigt. Wird die Ortshöhe auf die Gerinnesohle bezogen, dann wird die Energiehöhe über der Gerinnesohle angezeigt. Ein derartiges Röhrchen wird deshalb als **Staurohr** oder **Pitotrohr** bezeichnet. Mit der Öffnung entgegen der Anströmrichtung wird in ihm die Energiehöhe oder der Gesamtdruck (= statischer Druck + Geschwindigkeitsdruck) in der Flüssigkeit angezeigt.

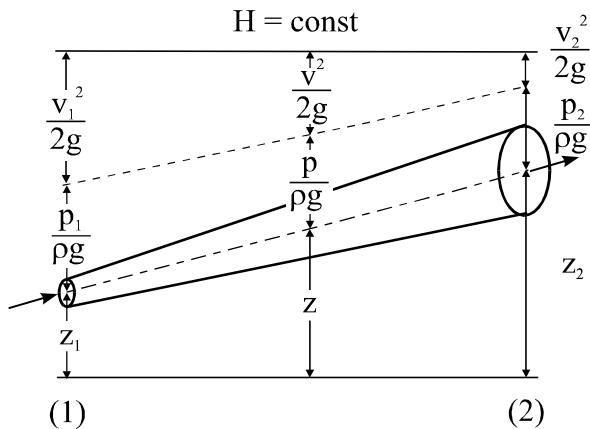
**Beispiel 4.6:** In einem Rohr werden unmittelbar vor und nach einer Verengung über Bohrungen in der Rohrwand die Druckhöhen in den Querschnitten (1) und (2) bestimmt (Abb. 4.16). Unterscheidet sich die Anzeige eines Staurohrs, das an beiden Querschnitten eingeführt wird?



**Abb. 4.16:** Druckabfall im Bereich einer Rohrverengung

Da keine Reibungsverluste berücksichtigt werden, ist die Anzeige des Gesamtdrucks durch das Staurohr in beiden Querschnitten gleich. Der Wasserspiegel steigt in jedem der beiden Querschnitte um die jeweilige Geschwindigkeitshöhe über die entsprechende Druckhöhe an und gibt die Lage der Energiehöhe wieder. Da wegen der Kontinuitätsbedingung das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  durch das Flächenverhältnis bekannt ist (Beispiel 4.2), kann über den Druckhöhenunterschied zwischen den beiden Querschnitten der Durchfluss im Rohr bestimmt werden.

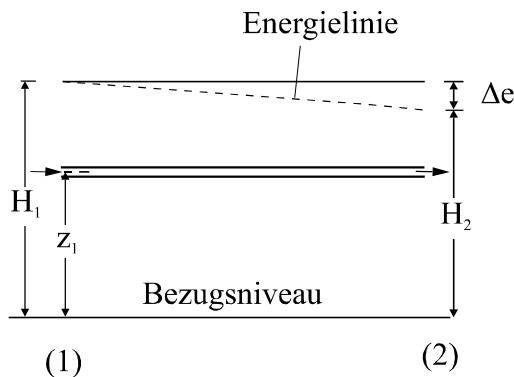
Aus den Beispielen wird ersichtlich, dass mit einfachen Hilfsmitteln wie Druckbohrungen mit angeschlossenen Standrohren und dem Staurohr Einblicke in die Strömungsverhältnisse sowohl der Rohrströmung als auch bei der Gerinneströmung mit freier Oberfläche gewonnen werden können. Durch die Bestimmung des Gesamtdrucks kann die Lage der Energiehöhe in einem Querschnitt bestimmt werden.



**Abb. 4.17:** Energie- und Drucklinienverlauf für eine gerade Stromröhre bei Reibungsfreiheit

Ist die durchflossene Querschnittsfläche bekannt, so kann durch Abtragen der Geschwindigkeitshöhe von der Energiehöhe auch die Lage der Druckhöhe im betrachteten Querschnitt gewonnen werden. Durch die Verbindung der einzelnen Druckhöhen kann in Strömungsrichtung der Druckhöhenverlauf, die sog. **Drucklinie**, gezeichnet werden. Bei reibungsfreier Strömung weist die Energiehöhe längs dieser Strömung keine Veränderung auf. Sie ist demnach horizontal (Abb. 4.17).

In Wirklichkeit sind z. B. in einer Rohrleitung durch die Wirkung der Rohrreibung Energiehöhenverluste nicht zu vermeiden. Diese Verluste können ihrerseits durch die Messungen des Gesamtdrucks längs der Leitung direkt gemessen werden. Damit ist längs einer Leitung auch der Verlauf der Energiehöhen in den einzelnen Messpunkten bekannt. Ihre Verbindung zeigt dann den Verlauf der sog. **Energielinie** an. Die Energielinie weist grundsätzlich ein Gefälle in Strömungsrichtung auf. Das Vorgehen bei der Anwendung der Bernoulli-Gleichung für reibungsbehaftete Strömungen modifiziert deshalb lediglich den Energiehöhenvergleich. Zwischen den Querschnitten (1) und (2) wird berücksichtigt, dass in Strömungsrichtung ein Energiehöhenverlust  $\Delta e$  auftritt (Abb. 4.18).



**Abb. 4.18:** Energiehöhenvergleich unter Berücksichtigung der Rohrreibung

Der Energiehöhenvergleich liefert dann

$$H_1 = H_2 + \Delta e \quad (4.56)$$

Es war die Aufgabe von experimentellen Untersuchungen, über Messungen das Widerstandsverhalten von bestimmten Strömungen, wie z. B. der Rohrströmung, zu erforschen und daraus Gesetzmäßigkeiten über die dabei auftretenden Energiehöhenverluste abzuleiten. Auf diese Weise war es möglich, auch ohne die Simulation von Einzelheiten des Strömungsfeldes technisch wichtige Strömungen zu beherrschen.

Bei der eindimensionalen Betrachtung wird der Term mit der Geschwindigkeitshöhe bei ungleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung durch einen Korrekturfaktor  $\alpha$  ausgeglichen, der stets größer als 1 ist.

Für diesen Korrekturfaktor gilt

$$\alpha = \frac{1}{v^3 A} \iint_A u^3 dA \quad (4.57)$$

Auf das mehrdimensionale Strömungsfeld sind die auf den Stromfaden bezogenen Aussagen der Bernoulli-Gleichung nicht mehr ohne weiteres übertragbar, da Aussagen über den örtlichen Druck nur unter der Voraussetzung der hydrostatischen Druckverteilung möglich sind. Bei gekrümmten Strombahnen wird die Druckverteilung durch die Beschleunigungen normal zur Strömungsrichtung beeinflusst, welche durch die Gl. 3.17a beschrieben werden. Ist im

Strömungsfeld an einem diskreten Punkt die Druckhöhe bekannt, so kann davon ausgehend die Druckhöhenverteilung berechnet werden. Bei der Strömung mit freier Oberfläche ist z.B. der Atmosphärendruck als Randbedingung vorgegeben. Bei der verlustfreien Strömung gilt die Bernoullische Konstante im gesamten Strömungsfeld. Zur Berechnung der Druckhöhenverteilung in Normalenrichtung wird deshalb der Ansatz  $\partial H / \partial n = 0$  herangezogen.

Aus der Eulerschen Bewegungsgleichung nach Gl. 4.46 wird in Verbindung mit Gl. 3.17a für die Normalenrichtung die Beziehung

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r} = k_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.58)$$

erhalten, welche ähnlich aufgebaut ist wie Gl. 4.49 für die tangentiale Richtung. Wirkt als Massenkraft lediglich die Schwerkraft und wird eine stationäre Strömung vorausgesetzt, dann gilt

$$\frac{v^2}{r} = - \frac{\partial(gz)}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.59)$$

Diese Gleichung kann durch Ergänzung mit dem Term  $v \partial v / \partial n$  umgeformt werden zu

$$\frac{v^2}{r} - v \frac{\partial v}{\partial n} = - \frac{\partial(gz)}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - v \frac{\partial v}{\partial n} \quad (4.60)$$

wobei die rechte Gleichungsseite dann gleichbedeutend ist mit

$$-\frac{\partial(gz)}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -g \frac{\partial}{\partial n} \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right)$$

Das bedeutet jedoch, dass wegen der konstanten Energiehöhe im Strömungsfeld die rechte Gleichungsseite von Gl. 4.60 verschwindet. Normal zur Strömungsrichtung muss demnach bei konstanter Energiehöhe die Bedingung

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v}{r} \quad (4.61)$$

eingehalten werden. Kann die Veränderung der Tangentialgeschwindigkeit  $v$  wegen der Veränderungen des Radius  $r$  der Strombahnenkrümmung im Strömungsfeld nicht explizit beschrieben werden, so ist eine Integration längs einer Äquipotentiallinie vorzunehmen. Sind im einfachsten Fall die Stromlinien konzentrische Kreise in einer Ebene, so weist die Richtung der Normalen zum Kreismittelpunkt. Für diesen Sonderfall kann die Geschwindigkeitsverteilung zu

$$v = \frac{c}{r} \quad (4.62)$$

direkt angegeben werden. Diese Geschwindigkeitsverteilung liegt auch im sog. Potentialwirbel (s. Ziff. 6.2.3) vor.

**Beispiel 4.7:** Für die Strömung über eine Sprungschanze entsprechend Abb. 3.10 sind Geschwindigkeits- und Druckhöhenverteilung im tiefsten Punkt zu bestimmen. Gegeben sind hierfür die Wassertiefe  $y = 1,0 \text{ m}$  und die Geschwindigkeit  $v_o = 8,0 \text{ m/s}$  an der Oberfläche des Wasserstrahles. Der Ausrundungsradius der Schanze beträgt  $6,0 \text{ m}$ .

Lösung: Zunächst ist das Energiehöhenniveau zu bestimmen. Wird die Sohlenkote am tiefsten Punkt der Sprungschanze mit  $z = 0$  vorgegeben, so ist an der Strahloberfläche, für welche die Druckhöhe wegen des Atmosphärendrucks Null ist, die Energiehöhe

$$H_o = z_o + p_o/\rho g + v_o^2/2g = 1,00 + 0 + 8,0^2/19,62 = 1,00 + 3,26 = 4,26 \text{ m}$$

Der Radius der durch die Oberfläche gebildeten Stromlinie ist  $r_o = 6,0 - 1,0 = 5,0 \text{ m}$ . Über die Gl. 4.62 kann dann die Konstante  $c$  für die Kreisbewegung bestimmt werden:

$$c = v_o \cdot r_o = 8,0 \cdot 5,0 = 40,0 \text{ m}^2/\text{s}$$

Für die Kreisbewegung ist somit auch die Geschwindigkeit am der Unterseite des Strahls zu berechnen. Es ist

$$v_u = c/r = 40,0/6,0 = 6,67 \text{ m/s}$$

$$v_u^2/2g = 2,67 \text{ m}$$

Über das bereits bekannte Energiehöhenniveau kann dann auch die Druckhöhe am tiefsten Punkt zu

$$p_u/\rho g = H_o - z_u - v_u^2/2g = 4,26 - 0 - 2,67 = 1,59 \text{ m}$$

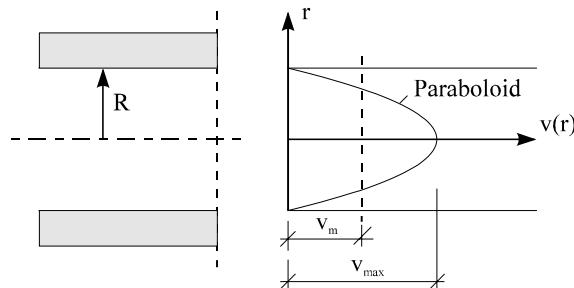
berechnet werden. Der Druck an der Sohle ist demnach beträchtlich höher als derjenige aus dem hydrostatischen Druck.

Bei der Strömung über eine konvexe Oberfläche, wie sie z.B. eine Wehrkrone darstellt, kommt es zu einer Verringerung der Druckhöhe im Innern des Strömungsfeldes im Vergleich zur hydrostatischen Druckverteilung. Grundsätzlich nimmt die Druckhöhe in Normalenrichtung ab.

Die von der hydrostatischen Druckverteilung abweichende Druckverteilung bei gekrümmten Strombahnen kann bei der eindimensionalen Berechnung durch einen Druckhöhenausgleichsbewert berücksichtigt werden. Dies ist nur sinnvoll, wenn die damit verbundene Ungleichförmigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung ebenfalls beachtet wird. Da sich diese beiden Korrekturen in Bezug auf die Energiehöhe ergänzen, sollte die Auswirkung der Strombahnenkrümmung auf einzelne Größen des Strömungsfeldes eigens betrachtet werden.

## Formelzeichen zu Kapitel 4

Zeichen	Benennung	Einheit
A	Fläche	$\text{m}^2$
E	innere Energie	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
F	Kraft	N
g	Erdbeschleunigung	$\text{m}/\text{s}^2$
h	Höhe	m
H	Energiehöhe	m
I	Impuls	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$
k	Vektor der Massenkraft	$\text{N}/(\text{kg}/\text{m}^3)$
K	kinetische Energie	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
m	Masse	kg
n	Normalenvektor	-
p	Flüssigkeitsdruck	Pa
P	Leistung	$\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Q	Ab-, Durchfluss	$\text{m}^3/\text{s}$
$\dot{Q}_w$	Wärmestrom	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Re	Reynolds-Zahl	-
s	Weglänge	m
S	Oberfläche	$\text{m}^2$
t	Spannungsvektor	$\text{N}/\text{m}^2$
t	Zeit	s
v	Geschwindigkeitsvektor	$\text{m}/\text{s}$
$\bar{v}$	mittlere Geschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$v_x, v_y, v_z$	Komponenten der Geschwindigkeit im kartesischen Koordinatensystem	$\text{m}/\text{s}$
$v_r, v_\phi$	Komponenten der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten	$\text{m}/\text{s}$
V	Volumen	$\text{m}^3$
$\alpha$	Korrekturfaktor für die Geschwindigkeitshöhe	-
$\bar{\alpha}$	Korrekturfaktor für den Impulsstrom	-
$\epsilon_t$	scheinbare kinematische Zähigkeit	$\text{m}^2/\text{s}$
$\eta$	dynamische Zähigkeit	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
$\nu$	kinematische Zähigkeit	$\text{m}^2/\text{s}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg}/\text{m}^3$
$\tau$	Spannung	$\text{N}/\text{m}^2$

**Aufgabe 4.1**

Bei laminarer Strömung gilt für das Kreisrohr folgende parabolische Geschwindigkeitsverteilung:

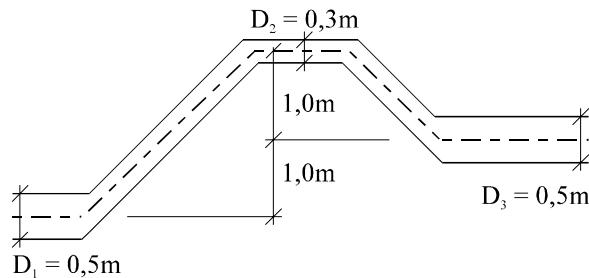
$$v = \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) v_{\max}$$

Berechnen Sie für diese Verteilung:

- den Geschwindigkeitshöhenbeiwert  $\alpha$  und
- den Impulsbeiwert  $\bar{\alpha}$

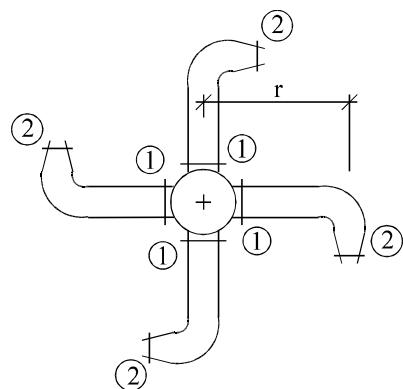
die eine eindimensionale Berechnung der Rohrströmung ("Stromröhre") auf der Basis der mittleren Geschwindigkeit ermöglichen.

- Wie verändern sich die Beiwerte für den Fall der turbulenten Strömung?

**Aufgabe 4.2**

Gegeben ist die rechts dargestellte Rohrleitung und  $p_1/\rho g = 3$  mWS

- Wie groß darf der maximale Durchfluss Q sein, damit an keiner Stelle ein minimaler Druck von  $p/\rho g = -8$  mWS unterschritten wird?
- Bestimmen Sie hierfür Energie- und Drucklinie (es treten keine Verluste auf).

**Aufgabe 4.3**

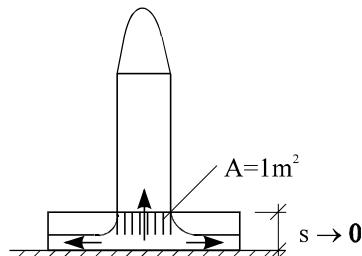
Die Wasserzugabe in einer Beton-Mischhanlage erfolgt mit Hilfe des in der Aufsicht dargestellten vierarmigen Sprenggrades (Achse vertikal).

Der Wasserdruk in den Querschnitten 1 beträgt  $p_{\text{ü}} = 200 \text{ kN/m}^2$ .  
Flüssigkeitsreibung und örtliche Verluste werden vernachlässigt.

$$D_1 = 0,1 \text{ m} \quad D_2 = 0,05 \text{ m} \quad r = 6 \text{ m}$$

- Wie groß ist der gesamte Wasserauswurf  $Q$  in  $\text{m}^3/\text{s}$ ?
- Wie groß ist das erzeugte Drehmoment (bei feststehendem Drehkopf)  $M$  in  $\text{kNm}$ ?

#### Aufgabe 4.4



Wie groß ist die mittlere Gasaustrittsgeschwindigkeit einer Rakete im Augenblick des Abhebens vom Boden?

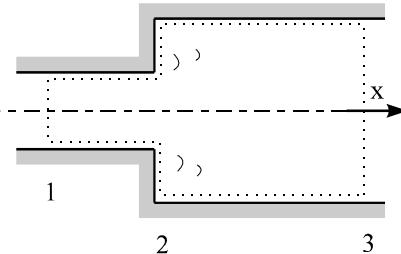
Gewicht der Rakete:  $G = 80 \text{ kN}$

Dichte des Gases:  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$

Gesamte Düsenfläche  $A = 1 \text{ m}^2$

Der Luftwiderstand wird vernachlässigt!

#### Aufgabe 4.5



Der Druckverlust aufgrund einer unstetigen Querschnittserweiterung in einem Rohr bezeichnet man als Borda-Cornotschen Stoßverlust.

- Berechnen Sie mit Hilfe des Impulssatzes den Druckabfall zwischen den Querschnitten 1 und 3. Gegeben sind:  $A_1, A_3, v_1, p_1$

Die Strömung ist stationär, inkompressibel und reibungsfrei.

Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst den Druck im Querschnitt 2 unmittelbar hinter der Querschnittserweiterung

## 5 Berücksichtigung der Randbedingungen

Mit den Bewegungsgleichungen sind die beschreibenden Differentialgleichungen zur Berechnung von Strömungen in allgemeinster Form gegeben. Soweit es die darin eingearbeiteten Materialgesetze zulassen, könnten diese Gleichungen unter Beachtung der Randbedingungen des zugehörigen Strömungsfeldes gelöst werden. Während die direkte Integration, wie allgemein üblich, nur den Zugang zu einfachen Strömungen ermöglicht, sind durch die numerischen Methoden heute Hilfsmittel verfügbar, welche auch komplexere Strömungsfelder erschließen, sofern sinnvolle Ansätze für die Reibungsspannungen in turbulenten Strömungen überhaupt möglich sind. Unerlässlich für diese Lösungen ist die Beschreibung der Strömung in der Nähe von festen Wänden oder deren Verhalten, wenn an Stelle von festen Wänden die Strömung durch die umgebende ruhende Flüssigkeit geprägt wird. Bevor darauf näher eingegangen wird, sind einige grundsätzliche Anmerkungen darüber erforderlich, wie überhaupt eine Strömung entsteht.

### 5.1 Ursachen der Bewegung

Der überwiegende Teil der zu behandelnden Strömungen ist durch die Wirkung der **Schwerkraft** bedingt. Der Ausfluss aus einem Gefäß wird dann möglich, wenn nach der Öffnung eines Verschlusses der im bisherigen Ruhezustand befindliche Druck an der Behälterwand durch den dort herrschenden Umgebungsdruck ersetzt wird. Ist dies lediglich der Atmosphärendruck, so wird die ehedem vorhandene Druckenergie umgesetzt in ein Maximum an Bewegungsenergie. Auf diesem Prinzip beruht letztendlich die Wasserversorgung, bei der für das Versorgungsgebiet über einen Hochbehälter ein ausreichender Ruhedruck bereitsteht, welcher die Versorgung der zugehörigen Abnehmer gewährleistet. Reicht der Versorgungsdruck nicht aus, sind z. B. Hochhäuser zu erschließen, dann ermöglichen örtliche Druckerhöhungsanlagen durch den punktuellen Eintrag von Energie über Pumpen eine Steigerung des verfügbaren Energieniveaus. Auch die Strömungen in natürlichen Gerinnen beruhen auf der Wirkung der Schwerkraft. Hierbei wirkt auch bei geringsten Neigungen der in Hangrichtung fallende Anteil der Erdbeschleunigung als Antrieb für die Bewegung. Dies gilt auch für die wesentlich geringeren Fließgeschwindigkeiten im Bereich des unterirdischen Abflusses.

Bewegungen in Gewässern mit freier Oberfläche können jedoch auch durch die Wirkung von **Schubspannungen** an der Phasentrennfläche zwischen Luft und Wasser angeregt werden. Beispiele dafür sind die windinduzierten Strömungen in Binnenseen oder des Ozeans. Schubspannungen werden auch übertragen an der Grenzfläche flüssig-fest. Beispiele dafür sind der rotierende mit Wasser gefüllte Zylinder oder die Erzeugung von Strömungen durch Rührwerke oder frei drehende Propeller. Ebenfalls durch die Wirkung von Schubspannungen werden an den Grenzflächen flüssig-flüssig, den sog. freien Strahlgrenzen, bei Geschwindigkeitsunterschieden zwischen benachbarten Bereichen der Flüssigkeit Einmischvorgänge ausgelöst. Durch die Wirkung von Schubspannungen kann einer Strömung nicht nur mechanische Energie entzogen werden, sie können auch alleiniger Antrieb für bestimmte Strömungsarten sein. Mit die bekannteste schubspannungsinduzierte Strömung ist die sog. **Couette-Strömung** in einem Flüssigkeitsspalt, welche unter der Ziff. 5.2 behandelt wird.

Für Anwendungen im Bauingenieurwesen weniger von Bedeutung und deshalb nur von allgemeinem Interesse sind Strömungen, welche durch magnetische Felder beeinflusst werden (Magnetohydrodynamik) oder gar auf Veränderungen in der Oberflächenspannung beruhen.

Beim sog. Marangoni-Effekt wird unter der Wirkung von großen Temperaturgradienten die Oberflächenspannung verändert und bewirkt oberflächennahe Ausgleichsströmungen.

## 5.2 Berandungen des Strömungsfeldes

Die Ambivalenz der Wirkung von Schubspannungen auf die Strömung wurde unter Ziff. 5.1 angedeutet. Zum einen setzen Schubspannungen der Strömung einen Widerstand entgegen, wirken also energiezehrend, zum anderen können sie als alleiniger Antrieb für das Zustandekommen einer bestimmten Strömungsform dienen. Für die Beurteilung von Strömungen wird demnach wichtig sein, wie antreibende und hemmende Kräfte sich im Strömungsfeld auswirken. Dabei spielt das Vorhandensein einer festen, flüssigen oder gasförmigen Berandung eine nicht unwe sentliche Rolle. Eine Strömung wird deshalb von den Vorgängen in der Nähe der Berandung und deren physikalischen Eigenschaften beeinflusst.

### 5.2.1 Feste Berandung

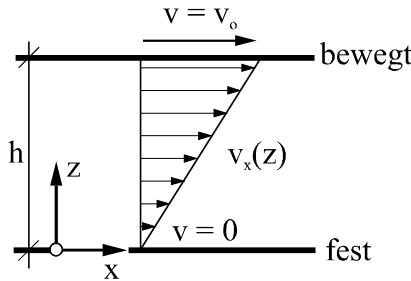
Eine entscheidende Bedeutung für den Abfluss im Bereich von festen Berandungen hat die sog. **Haftbedingung**. Sie besagt, dass die Geschwindigkeit mit Annäherung an die feste Wand auf den Wert Null abnehmen muss, wenn die Wand selbst in Ruhe ist (s. auch Ziff. 6.3). Dies folgt aus der einfachen Tatsache des Einflusses der Zähigkeit, derzufolge die molekulare Schubspannung linear abhängt vom Geschwindigkeitsgradienten (Gl. 1.3). Eine Unstetigkeit im Geschwindigkeitsprofil wäre demnach gleichbedeutend mit dem Auftreten von unendlich großen Schubspannungen. Dies ist physikalisch nicht möglich. Mit der Annäherung an die Wand muss also, unabhängig von der Größe der Geschwindigkeit in einiger Entfernung von der Wand, die Geschwindigkeit auf den Wert Null abnehmen. Die Haftbedingung der realen Strömung mit  $v_s = 0$  wird als **dynamische Randbedingung** bezeichnet, da sie Rücksicht auf die in Wandnähe vorhandenen Kräfte nimmt.

Stromlinien in Wandnähe verlaufen parallel zur Wand. Die Wand selbst ist eine Stromlinie mit der Geschwindigkeit Null, wegen der Definition der Stromlinie fällt die Tangentialgeschwindigkeit  $v_s$  auf den Wert Null ab. Auch für die turbulente Strömung ist die feste Wand eine wichtige Randbedingung. Mit Annäherung an die Wand ändern sich die Schwankungsbewegungen schon deshalb, weil Schwankungsbewegungen senkrecht zur Wand stärker behindert werden als wandparallele. Die Wandnähe bedingt demnach anisotrope Turbulenzeigenschaften.

Obwohl die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durch noch so kleine Kräfte gegeneinander bewegt werden können, findet diese Verschieblichkeit in Wandnähe ihre Grenzen, da dort sehr große Geschwindigkeitsgradienten auftreten. Demnach werden mit Annäherung an die Wand auch die Schubspannungen im Innern der Flüssigkeit größer und werden als sog. Wandschubspannung auf die feste Berandung abgetragen. Der Bereich, in welchem das Strömungsfeld durch die Anwesenheit der festen Berandung beeinflusst wird, die Geschwindigkeit also abfällt, wird nach L. Prandtl als die sog. **Grenzschicht** bezeichnet.

### 5.2.1.1 Couette-Strömung

Betrachtet wird die Strömung einer Flüssigkeit in einem horizontalen Spalt, welcher unten durch eine feste Wand, oben durch eine mit der konstanten Geschwindigkeit von  $v_0$  in x-Richtung bewegte Wand gebildet wird (Abb. 5.1). Ferner wird angenommen, dass die Strömung allein durch die Bewegung der oberen Wand verursacht wird, demnach kein Druckgradient in Strömungsrichtung vorliegt.



**Abb. 5.1:** Couette-Strömung

Die Spalthöhe ist entsprechend Abb. 5.1 mit  $h$  bezeichnet, die Strömung selbst sei laminar. Es liegen demnach folgende Randbedingungen vor.

$$\begin{aligned} z = 0: \quad & v = 0 \\ z = h: \quad & v = v_0 \end{aligned}$$

Die sich einstellende Geschwindigkeitsverteilung im Spalt kann durch diese Vorgabe nur horizontale Komponenten in x-Richtung aufweisen. Durch die Randbedingungen ist als einziger Geschwindigkeitsgradient ein  $dv_x/dz$  möglich. Die Geschwindigkeitskomponenten  $v_y$  und  $v_z$  sind bei dieser Bewegung nicht vorhanden. Durch die gleichbleibende Bewegung der oberen Berandung ist die sich einstellende Strömung zudem stationär. Beschrieben wird die Strömung, bei der allein die molekulare Zähigkeit wirkt, durch die Navier-Stokes-Gleichungen nach Gl. 4.44:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Für die vorliegende Couette-Strömung entfallen eine Reihe von Termen in diesen Gleichungen. Zunächst entfällt die lokale Beschleunigung. Die im zweiten Term der linken Gleichungsseite zusammengefassten konvektiven Beschleunigungen sind ebenfalls Null, da gemäß Gl. 3.3 alle Beschleunigungsterme entfallen. Nicht vorhanden sind nämlich  $\partial v_x / \partial x$  und  $v_z$ , das mit dem vorhandenen Geschwindigkeitsgradienten  $dv_x/dz$  zu multiplizieren wäre. Der Vektor der Massenkraft hat keine Komponente in x-Richtung, ein Druckgefälle ist nicht vorhanden, so dass auch die beiden ersten Terme auf der rechten Seite verschwinden. Damit wird diese Strömung ausreichend beschrieben durch

$$0 = \nu \Delta \mathbf{v} = \nu \frac{d^2 v_x}{dz^2} \quad (5.1)$$

nach zweimaliger Integration und dem Anpassen an die Randbedingungen wird daraus die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt zu

$$v_x = \frac{v_0 z}{h} \quad (5.2)$$

erhalten. Im Spalt liegt demnach eine lineare Abnahme der Geschwindigkeit von der bewegten zur festen Wand vor. Der konstante Geschwindigkeitsgradient von  $dv_x/dz = v_0/h$  bedeutet gleichzeitig, dass die Schubspannung über die gesamte Spalthöhe konstant ist. Im Bereich des Spalts steht dem von der Höhe abhängigen konvektiven Impulsstrom  $\rho v_x^2$  gegenüber der diffusiven höhenunabhängige -  $\eta dv_x/dz = -\eta v_0/h$ . Der diffuse Impulsstrom in z-Richtung erfolgt von der antreibenden Wand in Richtung zur festen Wand.

Wird durch die Bewegung der oberen Wand Flüssigkeit durch den Spalt bewegt, so ändern sich im Lauf der Zeit durch den Volumenstrom in Richtung der x-Achse die Randbedingungen am Beginn und Ende des Spalts durch eine allmähliche Druckumlagerung. In Fließrichtung wird sich aus diesem Grund aus Kontinuitätsgründen ein Druckgefälle  $\partial p/\partial x$  entgegen der Fließrichtung aufbauen, welches die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt beeinflusst. Dieser allgemeinere Fall wird im nachfolgenden Beispiel behandelt.

**Beispiel 5.1:** Geschwindigkeitsverteilung einer Couette-Strömung unter der zusätzlichen Einwirkung von Druckgradienten. Aus Gl. 4.44 folgt in diesem Fall

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (5.3)$$

Diese Gleichung muss wiederum unter Beachtung der bereits bekannten Randbedingungen gelöst werden. Für die Geschwindigkeitsverteilung  $v_x(z)$  folgt dann

$$v_x = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + z \left( \frac{v_0}{h} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \right) = \frac{z}{h} v_0 + \frac{1}{2\eta} (z^2 - zh) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (5.4)$$

Für  $\partial p/\partial x = 0$  folgt daraus wieder die bereits bekannte schubspannungsgetriebene Strömungsform. Für  $v_0 = 0$  wird die Spaltströmung unter der alleinigen Wirkung eines Druckgradienten beschrieben. In Gl. 5.4 kann der Druckgradient positiv oder negativ sein. Wird die Schubspannungsverteilung für diesen Fall gesucht, so wird

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{h} + \left( z - \frac{h}{2} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (5.5)$$

Diese Gleichung beschreibt die lineare Abhängigkeit der Schubspannung von z. Für die allein durch den Druckgradienten angetriebene Spaltströmung wird für die mittlere Geschwindigkeit v ein Ausdruck

$$v = -\frac{h^2}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (5.6)$$

erhalten. In diesem Fall wird dann die Schubspannung in Spaltmitte für  $z = h/2$  zu Null. Dies ist eine unmittelbare Folge des dort auftretenden Geschwindigkeitsmaximums, welches  $v_{max} = 1,5v$  beträgt. Dies folgt aus der parabelförmigen Geschwindigkeitsverteilung.

Das Strömungsfeld dieser reibungsbehafteten Strömung weist eine wichtige Eigenschaft auf: Es ist nicht rotationsfrei. Dies kann nachgewiesen werden, indem nach Gl. 3.11 die Rotation berechnet wird. Demnach ist

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 2 \boldsymbol{\omega}$$

Bei der Spaltströmung ist lediglich ein Geschwindigkeitsgradient  $dv_x/dz$  vorhanden. Dieser ist Bestandteil der y-Komponente des Rotationsvektors. Für diesen wird

$$\text{rot } v_y = 2 \omega_y = \frac{dv_x}{dz} \quad (5.7)$$

Der Rotationsvektor weist demnach auf eine Drehung der Flüssigkeitsteilchen mit einer Rotationsachse parallel zur y-Richtung hin. Obwohl durch die Rotation selbst keine Schubspannungen erzeugt werden, kann diese in Bezug zur Schubspannung gesetzt werden. In der einfachen Scherströmung kann die Deformation des Flüssigkeitselementes als die Überlagerung einer Streckung ohne Rotation mit einer Rotation aufgefasst werden (Abb. 5.2). Bei allen reibungsbehafteten Strömungen ist die Rotation der Flüssigkeitsteilchen zu beobachten.

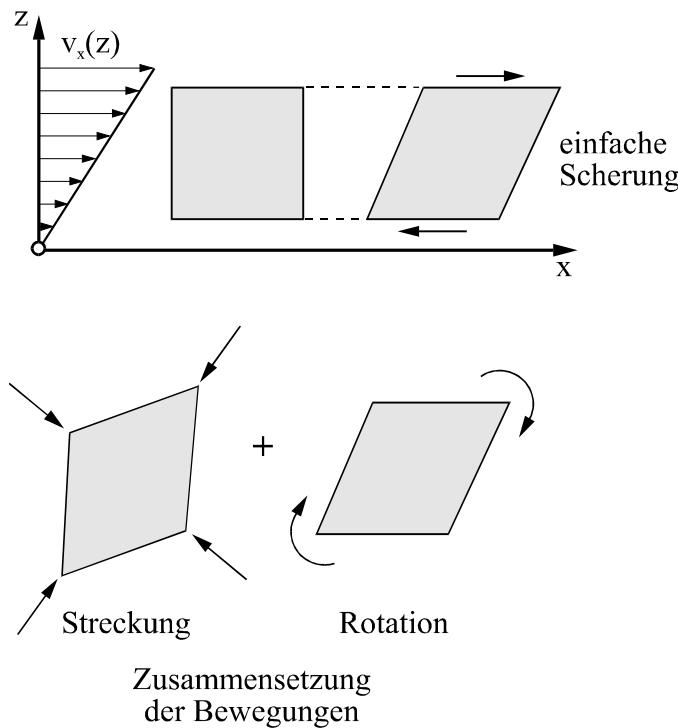


Abb.: 5.2: Verformung des Flächenelements in der Scherströmung

### 5.2.1.2 Turbulente Scherströmung in der Nähe einer festen Wand.

Die Aussagen über die laminare Scherströmung können in ihrer Konsequenz auch auf die turbulente übertragen werden. In diesem Fall müssen die viskosen Spannungen noch durch die Reynolds-Spannungen ergänzt werden. Ohne Wirkung eines Druckgradienten gilt dann in Anlehnung an Gl. 5.1

$$0 = \frac{d}{dz} \left( \eta \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \rho \overline{v'_x v'_z} \right) \quad (5.8)$$

Aus der Integration dieser Gleichung über die Spalthöhe folgt, dass die gesamte Schubspannung, die sich jetzt aus den viskosen und den Reynoldsschen Anteilen zusammensetzt, ebenfalls von  $z$  unabhängig ist.

$$\text{const.} = \tau_0 = \eta \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \rho \overline{v'_x v'_z} \quad (5.9)$$

Der Index 0 für die Schubspannung soll in diesem Fall die über die Wand eingetragene Schubspannung bezeichnen, die sog. **Wandschubspannung**. Wegen der Haftbedingung an der bewegten Wand müssen andererseits für  $z = h$  die Reynoldsschen Spannungen dort verschwinden. Es bleibt dann in Wandnähe allein der viskose Anteil zurück.

Bei Strömungen unter der Einwirkung von Druckgradienten sind die Schubspannungen, wie am Beispiel 5.1 aufgezeigt, linear mit der Entfernung von der Wand veränderlich. Sie verschwinden dort, wo ein Maximum in der Geschwindigkeit erreicht wird und nehmen in Wandnähe ihr Maximum an. Wie später bei der Rohrhydraulik gezeigt wird, gilt diese lineare Schubspannungsverteilung auch für die turbulente Rohrströmung. Ganz allgemein kann für die laminare und turbulente Strömung im Spalt eine lineare Schubspannungsverteilung abgeleitet werden, welche bei nicht verschwindendem Druckgradienten der Beziehung

$$\tau = \tau_0 \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \quad (5.10)$$

folgt. In unmittelbarer Wandnähe kann die Schubspannung als nahezu konstant angenommen werden. Dies ist für die anschließende Behandlung der Grenzschicht eine ungemein wichtige Erkenntnis. In dieser wandnahen Schicht spielen die sonstigen Abmessungen des betrachteten Strömungsfeldes keine Rolle. Eine Umformung von Gl. 5.9 durch die Division der Wandschubspannung durch die Dichte  $\rho$  führt auf

$$\frac{\tau_0}{\rho} = v \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \overline{v'_x v'_z} \quad (5.11)$$

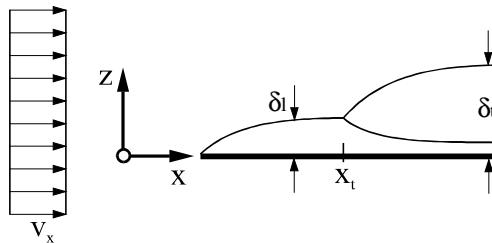
Aus dem Produkt der beiden Schwankungsgeschwindigkeiten auf der rechten Gleichungsseite ist zu ersehen, dass der Ausdruck  $\tau_0/\rho$  das Quadrat einer Geschwindigkeit ausdrückt. Für die Grenzschichtbetrachtung kann daraus die wichtige Größe der **Schubspannungsgeschwindigkeit**  $v_*$  abgeleitet werden:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (5.12)$$

Diese Größe  $v_*$  wird u.a. herangezogen, um Geschwindigkeitsverteilungen dimensionslos darzustellen.

### 5.2.1.3 Grenzschichtentwicklung an der ebenen Platte

Die Einsicht in die komplizierten Zusammenhänge der Strömung in Wandnähe wurde aus Experimenten mit der sog. längsangeströmten ebenen Platte gewonnen. Hierbei wird die Entwicklung der Grenzschicht in einer Grundströmung in Richtung der Platte beobachtet (Abb. 5.3).



**Abb. 5.3:** Längsangeströmte ebene Platte

Die Haftbedingung an der Plattenoberfläche kann erst mit Beginn der Platte bei  $x = 0$  wirksam werden. Von da an bildet sich eine anwachsende Grenzschicht  $\delta_l$  aus, welche mit Hilfe der Gleichung

$$\delta_l = 6 \cdot x \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

angegeben werden kann. Die Reynolds-Zahl ist in dieser Gleichung unter Verwendung der Entfernung von der Plattenvorderkante als charakteristischer Länge angegeben.

$$\text{Re}_x = \frac{V_x X}{v} \quad (5.14)$$

In einer bestimmten Entfernung  $x_t$  von der Vorderkante wird plötzlich ein wesentlich schnelleres Anwachsen der Grenzschicht beobachtet. Formelmäßig kann dies durch die Beziehung

$$\delta_t = 0,38(x - x_t)^{\frac{4}{5}} \cdot \left( \frac{v}{V_x} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (5.15)$$

ausgedrückt werden. Ursache für diese Erscheinung ist ein plötzliches Umschlagen der Strömung innerhalb der Grenzschicht von laminar zu turbulent. Offensichtlich sind nach der Lauflänge  $x_t$  die Abmessungen in der Grenzschicht so groß, dass sich dort Schwankungsbewegungen quer zur Hauptströmungsrichtung ausbilden können. Auch in dieser turbulenten Grenzschicht ist in unmittelbarer Wandnähe eine viskose Unterschicht vorhanden. In diesem Bereich sind die Zähigkeitskräfte dominant, die Schubspannungen aus der Zähigkeit sind wegen des großen Geschwindigkeitsgradienten größer als die in einer größeren Entfernung möglich werdenden turbulenten Schubspannungen.

Aus Messungen ist bekannt, dass in dem an die viskose Unterschicht anschließenden Bereich die Schwankungsbewegungen am größten sind. Zur Kennzeichnung der Grenzschichtdicken, z.B. der viskosen Unterschicht, in Wandnähe wird eine Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{v_* \cdot y}{v} \quad (5.16)$$

verwendet, in der neben dem Wandabstand  $y$  die Schubspannungsgeschwindigkeit eingeht. Die **viskose Unterschicht** wird durch eine abstandsabhängige Reynolds-Zahl  $Re = 5$  begrenzt. Unmittelbar außerhalb dieser Schicht ist die größte Produktion an turbulenter kinetischer Energie infolge der Schwankungsbewegungen anzusetzen. Infolge der Scherwirkung entstehen sehr kleine Wirbel mit hoher kinetischer Energie. Zugleich ist hier ein Maximum an Dissipation von mechanischer Energie in Wärmeenergie vorhanden.

Die Abdrängung der Strömung von der festen Berandung durch die Grenzschichtentwicklung wird anschaulich durch die **Verdrängungsdicke**  $\delta_*$  beschrieben. Hierfür gilt

$$\delta_* \cdot v_x = \int_0^{\infty} (v_x - v(z)) dz \quad (5.17)$$

In der Rohr- und Gerinneströmung, den beiden Hauptanwendungsbereichen der Hydraulik, kann die turbulente Grenzschicht nur bis zur Rohrachse ( $y = r$ ) oder bis zum Wasserspiegel anwachsen.

#### 5.2.1.4 Grenzschicht unter Einwirkung von Druckgradienten

Die bisherigen Betrachtungen wurden für die Grenzschichtentwicklung an der längsangeströmten ebenen Platte vorgenommen. Da die wandnahe Reibungsschicht nur den Anteil der kinetischen Energie beeinflusst und durch die Platte selbst keine Umlagerung im Geschwindigkeitsfeld außerhalb der Grenzschicht erzeugt wird, ist der Druck längs der ebenen Platte als konstant anzunehmen. Die Entwicklung der Grenzschicht wird allerdings durch vorhandene Druckgradienten stark beeinflusst. Insbesondere sind Gebiete mit Druckanstieg ( $dp/dx > 0$ ) mit großer Vorsicht zu behandeln, da es hier zu Ablösungen der Strömung von der Wand kommen kann. Aus der Gl. (5.13) ist ersichtlich, dass für einen bestimmten Ort die laminare Grenzschicht mit wachsender Reynolds-Zahl kleiner wird. In einer beschleunigten Strömung ( $dv/dx > 0$ ) wird daher allgemein die Grenzschichtdicke abnehmen (Abb. 5.4). Dies folgt allein aus einer Ähnlichkeitsbetrachtung und der Kontinuitätsbedingung.

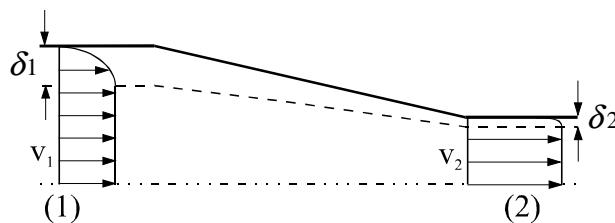
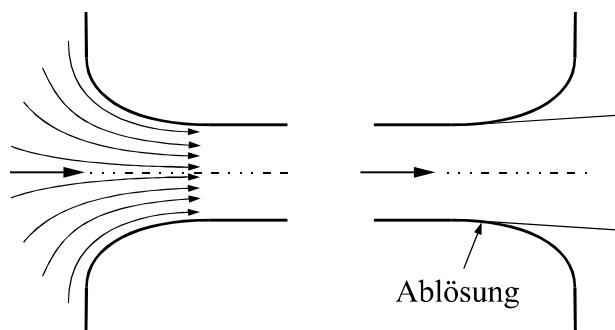


Abb. 5.4: Grenzschichtentwicklung bei beschleunigter Strömung

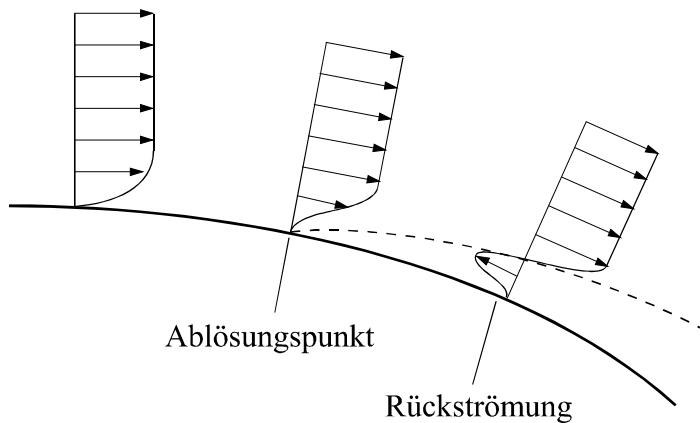
Ein einprägsames Beispiel für die gravierenden Unterschiede im Verhalten der Strömung in den Bereichen mit Druckanstieg oder -abfall ist das Anströmen eines strömungsgünstig geformten Einlaufs (Abb. 5.5). Ihm folgt die Strömung ablösungsfrei. Bei einer Umkehr der Strömungsrichtung kann die Strömung dieser Berandung nicht folgen und löst sich ab.



**Abb. 5.5:** Verhalten der Strömung in einem strömungsgünstig geformten Einlauf bei Umkehr der Strömungsrichtung

Bei einer verzögerten Bewegung steigt der Druck in Strömungsrichtung an. In einer Verzögerungsstrecke besitzen nur die Fluidteilchen außerhalb der Grenzschicht die erforderliche kinetische Energie, die sie befähigt, in Gebiete höheren Druckes einzudringen. Die Flüssigkeitsteilchen innerhalb der Grenzschicht haben mit Annäherung an die Wand zunehmend ihre kinetische Energie eingebüßt. Dabei wird dem Strömungsvorgang mechanische Energie als Wärmeenergie entzogen.

Die Teilchen innerhalb der Grenzschicht kommen daher zum Stillstand, noch ehe sie das Gebiet höheren Druckes, z.B. am Ende einer Aufweitung, erreicht haben. Damit kommt es in der Geschwindigkeitsverteilung im Bereich einer Verzögerungsstrecke irgendwann zu einer senkrechten Tangente an der Wand (Abb. 5.6). Die abgetrennten Fluidteilchen im stromab gelegenen Gebiet kommen unter die Wirkung eines Druckgradienten entgegen der Fließrichtung. Sie werden deshalb unterstrom der Stelle mit der vertikalen Tangente nach oberstrom beschleunigt: Rückströmung! Innerhalb der Grenzschicht kommt es dabei zu einer Scherströmung, wobei die Trennungslinie nicht stabil ist und in Wirbel zerfällt.



**Abb. 5.6:** Geschwindigkeitsprofil am Ablösungspunkt

Für die verzögerte Strömung ergeben sich daher einige wichtige Definitionen. Der **Ablösungspunkt** ist der Ort mit einer vertikaler Tangente der Geschwindigkeitsverteilung an der Wand. Unterstrom dieses Punktes kommt es zu einer **Rückströmung**. Hierbei wird dem System dadurch kinetische Energie entzogen, dass infolge der Reibung die Teilchen innerhalb der Rückströmungszone in Bewegung gehalten werden müssen. Die Schubspannungen am Rande der Rückströmzonen sind wegen der Grenze flüssig-flüssig wesentlich höher als in der Nähe der festen Wand (s. Kap. 5.2.2). In der Abb. 5.7 sind ablösungsgefährdete Zonen im Bereich von Strömungen mit Druckanstieg aufgeführt.

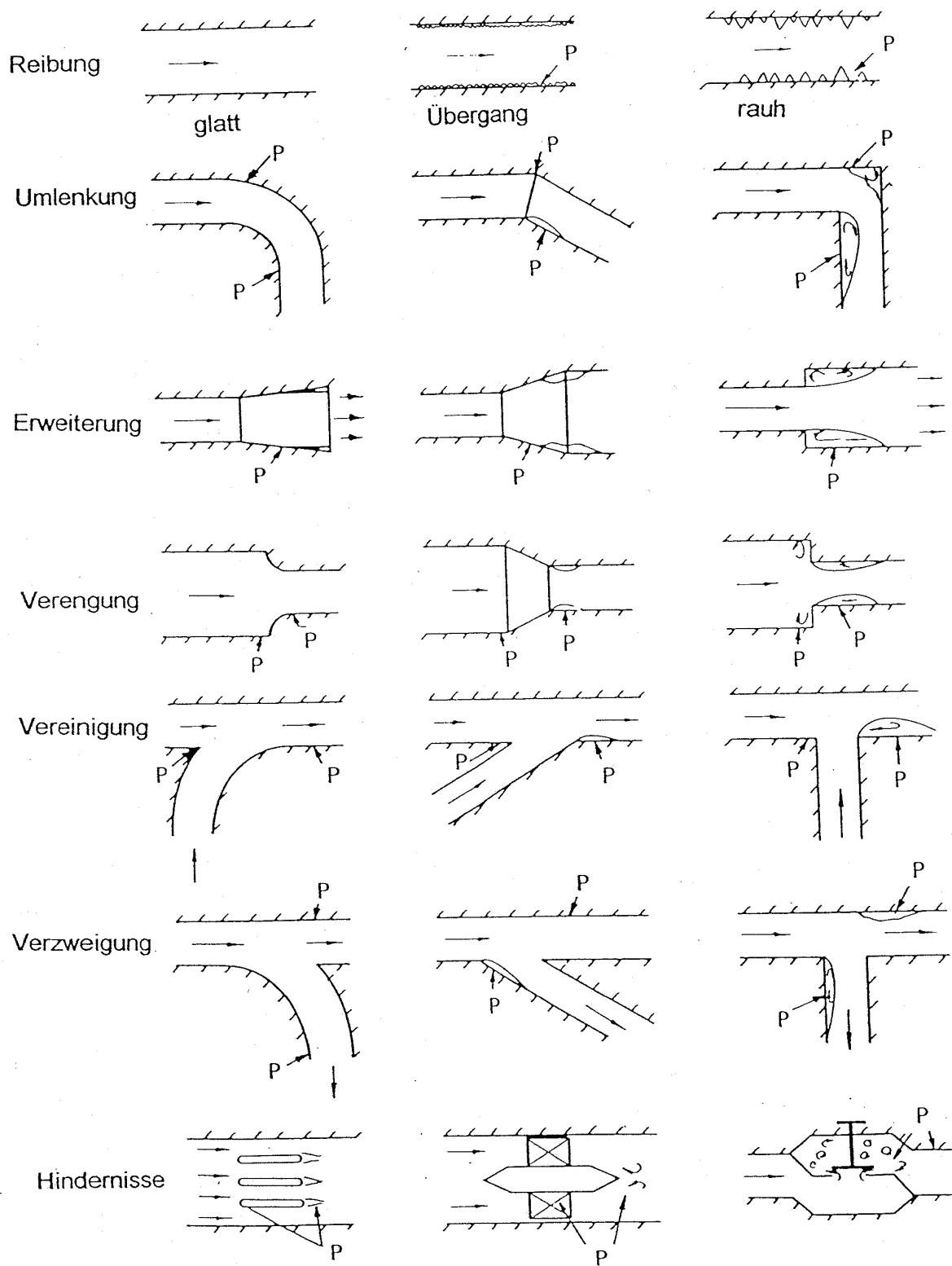
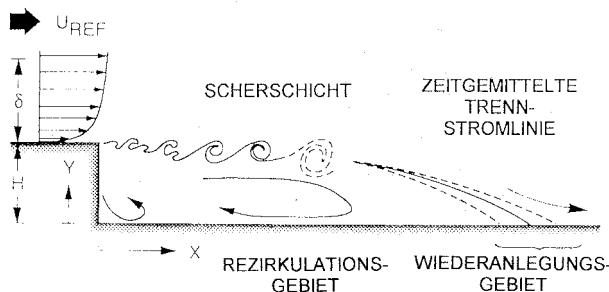


Abb.: 5.7: Ort des Druckanstiegs (p) für verschiedene Strömungskonfigurationen nach Miller

### 5.2.2 Flüssige Berandung

Mit der Rückstromzone wurde bereits eine Randbedingung angesprochen, bei der die Strömung außerhalb ihrer vorgegebenen festen Berandung sich ihre eigene Begrenzung innerhalb des Strömungsfeldes sucht. Von der Strömung wird daher die durch feste Wände vorgegebene Begrenzung nicht mehr angenommen. Die feste Wand als richtungsweisende Begrenzung, welche normalerweise die Eigenschaft einer Stromlinie aufweist, verliert dann ihre Bedeutung. Es ist einleuchtend, dass die Vorhersage dieser durch die Strömung selbst gesuchten Grenzen schwierig ist. Zum Unterschied zur festen Wand werden derartige Abgrenzungen als **freie Trennflächen** bezeichnet. Eine einfache zweidimensionale Struktur einer solchen Trennfläche bildet die Stufe im Bereich einer Querschnittserweiterung, wie sie in Abb. 5.8 dargestellt ist.



**Abb. 5.8:** Freie Trennfläche im Bereich einer Stufe

Charakteristisch für diese Trennfläche ist ihr instationäres Verhalten. Starke Fluktuationen weisen nicht nur die Geschwindigkeiten im Bereich der Strahlgrenze, sondern auch die Länge der Ablösungszone auf. Die Schwankungsbewegungen werden hierbei durch die starke Wirbelbildung im Bereich der instabilen Trennfläche ausgelöst. Bei derartigen turbulenten Strömungen, bei denen ohne die Anwesenheit von festen Berandungen Geschwindigkeitsgradienten auftreten, spricht man von **freier Turbulenz**. Nach Schlichting sind drei Arten zu unterscheiden:

Als **freie Strahlgrenze** wird das Berührungsgebiet gleichgerichteter Strahlen unterschiedlicher Geschwindigkeiten bezeichnet. Besonders ausgeprägt ist dabei die Instabilität der Trennfläche. Der **Freistrahl** entsteht beim Ausströmen aus einer Düse. Über seinen Umfang erfolgt die Vermischung mit der ruhenden oder schwach bewegten Umgebung. Schließlich bildet sich eine **Nachlaufströmung** hinter bewegten Objekten.

#### 5.2.2.1 Strahlhydraulik

Für die Anwendungen im Bauingenieurwesen sind vor allem die durch Strahlen ausgelösten Bewegungen in großräumigen Strömungsfeldern von besonderem Interesse. In der **Strahlhydraulik** wird nach einer Einteilung von Kraatz unterschieden nach dem Oberflächenstrahl, dem Tauchstrahl und dem Wandstrahl. Deren charakteristische Erscheinungsformen sind in Abb. 5.9 dargestellt.

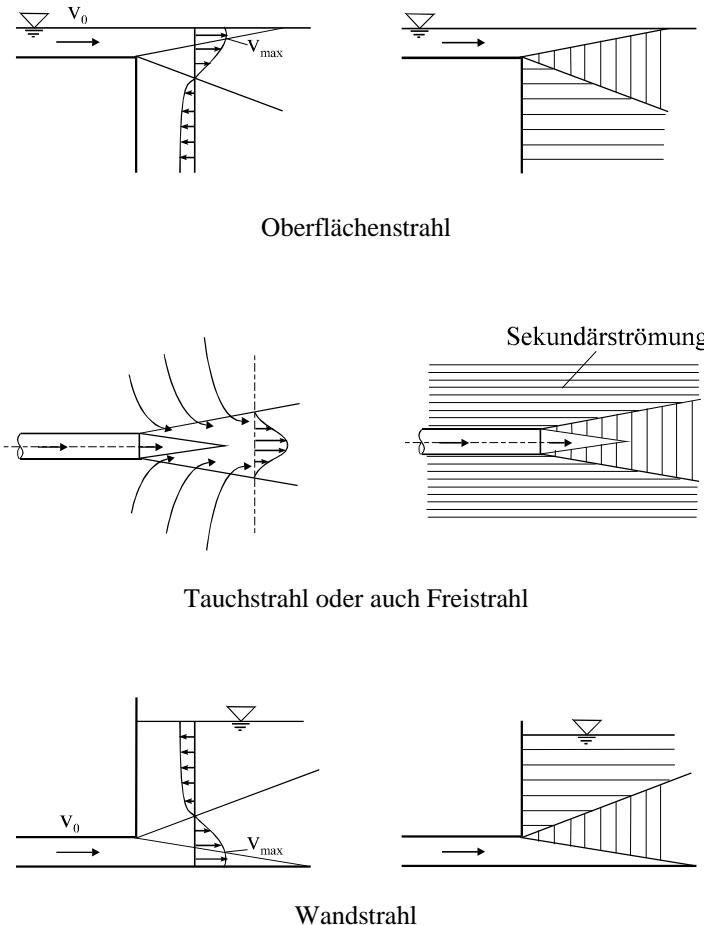


Abb. 5.9: Strahlformen nach Kraatz

Der Oberflächenstrahl vermischt sich an seiner Strahlunterseite mit der umgebenden Flüssigkeit. An seiner oberen Berandung wird wegen des Kontaktes mit der Luft wegen der geringeren Dichte des gasförmigen Mediums nur bei sehr hohen Abflussgeschwindigkeiten eine Vermischung erfolgen. Der Tauchstrahl ist identisch mit der Definition des Freistrahls nach Schlichting. Er ist z.B. anzutreffen beim Auslauf einer Rohrleitung in einen Speicherbehälter, wo die Geschwindigkeit des eintretenden Strahls von allen Seiten in die ruhende Flüssigkeit des Behälters einmischt. Beim Wandstrahl wird die Strahlunterseite durch eine feste Berandung geführt, so dass nur die Strahloberseite eine freie Trennfläche aufweist.

Charakteristisch für alle Arten von Strahlen ist, dass sie über eine bestimmte Lauflänge im sog. Strahlkern ihre ursprüngliche Geschwindigkeit bewahren. Durch die Einmischung mit der umgebenden Flüssigkeit nimmt der in Strahlrichtung bewegte Volumenstrom in Fließrichtung zu, während gleichzeitig die Strahlgeschwindigkeit verringert wird. Durch die Einmischung an den Kontaktzonen wird großräumig in der Umgebung eine Sekundärströmung erzeugt, welche die zur Einmischung benötigte Flüssigkeitsmenge in die Einmischzone transportiert. Als Strahlgrenze ist der Bereich des Strahls definiert, in dem statistisch der Mittelwert dieser hochturbulenten Strömung den Wert Null erreicht.

Die freie Strahlgrenze hat Grenzschichtcharakter, da in Querrichtung große Geschwindigkeitsgradienten vorliegen. Dort treten infolge der induzierten Schwankungsbewegungen sehr

hohe turbulente Schubspannungen auf. Im Gegensatz zur Wandgrenzschicht haben an der freien Strahlgrenze die viskosen Schubspannungen keinerlei Bedeutung.

### 5.2.2.2 Eigenschaften des Tauchstrahls

Der Tauchstrahl wurde für verschiedene Strahlquerschnitte ausgiebig experimentell untersucht. Hier sollen die wichtigsten Eigenschaften des kreisrunden und ebenen Tauchstrahls beschrieben werden. Die Kernzone, welche angibt, über welche Länge im Strahl noch seine Austrittsgeschwindigkeit erhalten bleibt, ist beim kreisrunden Strahl geringer als beim ebenen. Außerhalb der Kernzone weisen alle Strahlformen ähnliche Geschwindigkeitsprofile auf (Abb. 5.10).

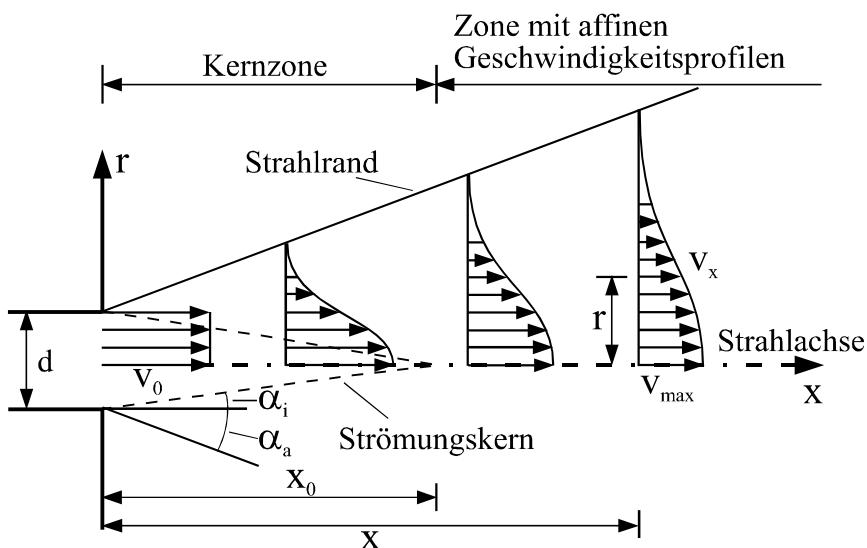


Abb. 5.10: Strahlausbreitung beim Tauchstrahl

Innerhalb der Strahlgrenzen nimmt durch die Einmischung der Volumenstrom zu. Der theoretische Zugang zu diesem Phänomen ist mit Hilfe des Impulssatzes möglich. Der Eintrittsimpuls bleibt erhalten, so dass trotz abnehmender Geschwindigkeit der Volumenstrom in Strömungsrichtung innerhalb der Strahlgrenzen erhöht wird. Die Rückströmung außerhalb der Strahlgrenzen sorgt für die Einhaltung der Kontinuitätsbedingung. Die Zunahme des Volumenstroms wird begleitet von einer Abnahme der kinetischen Energie. Die gesamte kinetische Energie wird letztlich durch die immer langsamer werdende Bewegung von immer größeren Bereichen des Strömungsfeldes abgebaut. Die hohen Schubspannungen in den freien Trennflächen werden über die Zirkulationsbewegungen an die feste Berandung weitergegeben.

Nachstehend sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung der beiden Strahlformen wiedergegeben.

Angaben zum **runden Strahl** mit einem Durchmesser  $d$  und einer Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$ :

Länge der Kernzone:

$$\frac{x_k}{d} = 6,2 \quad (5.18)$$

Verhältnis der maximalen Geschwindigkeit  $v_{max}$  außerhalb der Kernzone zur Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$ :

$$\frac{v_{max}}{v_0} = 6,2 \cdot \frac{d}{x} \quad (5.19)$$

Verhältnis der Volumenströme in Abhängigkeit von der Lauflänge:

$$\frac{Q_x}{Q_0} = 0,323 \cdot \frac{x}{d} \quad (5.20)$$

**Ebener Strahl** mit der Austrittsbreite  $b$ :

Länge der Kernzone:  $\frac{x_k}{b} = 5,2$  (5.21)

Verhältnis der maximalen Geschwindigkeit  $v_{max}$  außerhalb der Kernzone zur Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$ :

$$\frac{v_{max}}{v_0} = 2,28 \cdot \sqrt{\frac{b}{x}} \quad (5.22)$$

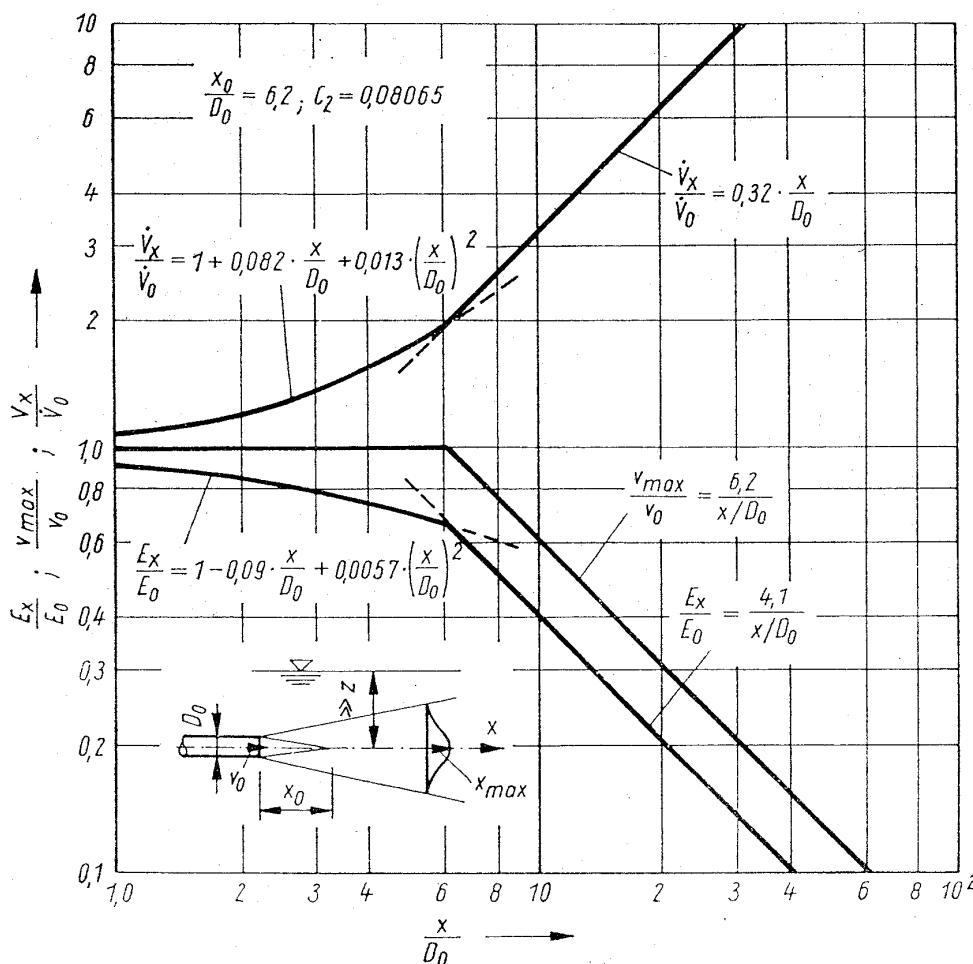


Abb. 5.11: Eigenschaften des runden Tauchstrahls nach Kraatz

Verhältnis der Volumenströme in Abhängigkeit von der Lauflänge:

$$\frac{Q_x}{Q_0} = 0,62 \cdot \sqrt{\frac{x}{b}} \quad (5.23)$$

Für den runden Strahl sind in der Abb. 5.11 die wesentlichen Eigenschaften in Abhängigkeit von der relativen Lauflänge aufgetragen.

### 5.2.3 Gasförmige Berandung

Normalerweise ist die freie Oberfläche in der Gerinneströmung die Berandung zwischen der fluiden und der gasförmigen Phase. Wegen des großen Dichteunterschieds kann der Einfluss der Luft oberhalb der Trennfläche zwischen beiden Phasen vernachlässigt werden, so lange die Luft nicht aktiv am Strömungsgeschehen beteiligt ist und die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsbewegung nicht über ca. 5 m/s liegen. Die Flüssigkeitsoberfläche wird durch die Wirkung der Oberflächenspannung stabilisiert, so dass selbst bei der vorherrschenden turbulenten Strömung die turbulenten Schwankungen senkrecht zur freien Oberfläche mit Annäherung an die Oberfläche gedämpft werden.

Ähnlich wie bei der Couette-Strömung kann eine aktive Luftströmung eine Bewegung des Wassers auslösen. Bekanntestes Beispiel hierfür ist die Auslösung von Zirkulationsströmungen in Seen oder im Ozean, welche allein durch die Einwirkung der Schubspannung infolge der Luftbewegung eine Bewegung an der flüssigen Trennfläche nach sich ziehen. Hohe Windgeschwindigkeiten können dabei zu erheblichen Verformungen der Oberfläche in Gestalt von Wellenbildung und Lufteinmischung führen. Umgekehrt können hohe Wassergeschwindigkeiten eine Instabilität der Phasentrennfläche auch bei passiver Luftphase einleiten. Die turbulenten Schwankungen innerhalb der Flüssigkeitsströmung werden dabei so groß, dass diese durch die Oberflächenspannung nicht mehr ausgeglichen werden. Es kommt daher zu einem Abtrennen einzelner Wassertropfen aus dem Verband und einer Einmischung von Luft in die flüssige Phase beim Wiedereintritt der Tropfen. Dabei entsteht ein Luft-Wasser-Gemisch, welches zu einer Verfärbung der Wasseroberfläche („weißes Wasser“, s. auch Ziff. 9.4.8) führt und sich nach unterstrom mit wachsender Lauflänge über die gesamte Wassertiefe ausbreitet.

Gänzlich anders geartet sind Strömungen, welche durch einzelne Luftblasen oder Blasenschwärme ausgelöst werden. In ruhendem oder leicht bewegtem Wasser steigen einzelne Gasblasen auftriebsbedingt nach oben. Auch hier gilt an der Phasentrennfläche die Haftbedingung. Flüssigkeitsteilchen in unmittelbarer Nähe der Blase werden mit nach oben bewegt. Dadurch entstehen im Strömungsfeld Sekundärströmungen, welche bei der kontinuierlichen Zugabe von Luft oder Gas zu ausgeprägten Zirkulationssystemen führen. Die in diesem Strömungsfeld auftretenden maximalen Vertikalgeschwindigkeiten sind durch die Steiggeschwindigkeit der Luftblasen vorgegeben. Diese wird über die Widerstandsbeiwerte nach Ziff. 5.3.1 ermittelt.

## 5.3 Anwendungen

Die Bedeutung der Randbedingungen für die Strömung soll für zwei ausgewählte Anwendungsbereiche demonstriert werden, bei denen sowohl die Grenzschichtentwicklung längs der festen Berandung als auch der Einfluss freier Trennflächen maßgeblich zum Verhalten der Strömung beitragen. Ausgesucht wurden hierfür das Widerstandverhalten umströmter Körper und eine spezielle Anwendung des Wandstrahls, welche unter dem Namen Coanda-Effekt bekannt ist.

### 5.3.1 Widerstand umströmter Körper

Bei der Umströmung von Körpern hängt der **Widerstandsbeiwert**  $c_w$  von der Geometrie des Körpers und von der Anströmgeschwindigkeit ab. Der Gesamtwiderstand wird bestimmt durch den Reibungswiderstand infolge der Haftbedingung an der Körperoberfläche und den Druckwiderstand infolge der Druckverteilung. Bei strömungsgünstig geformten Körpern überwiegt der Reibungswiderstand, bei stumpfen Körpern, z.B. der senkrecht angeströmten quadratischen Platte, tritt an den Rändern Ablösung ein, so dass der Widerstand nahezu ausschließlich Druckwiderstand ist.

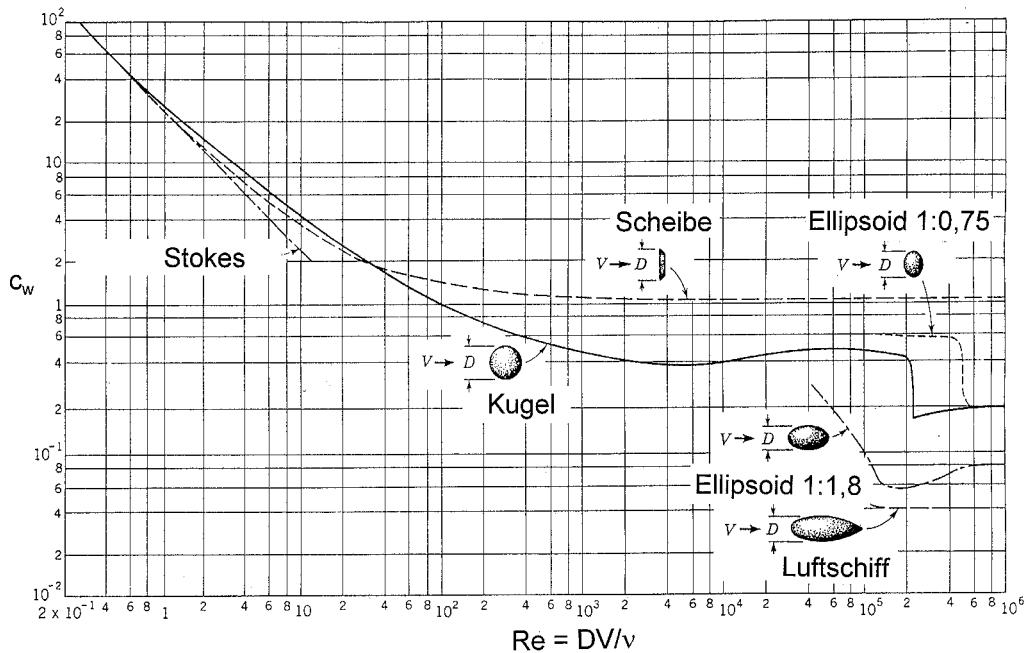
Die Widerstandskraft wird allgemein in Abhängigkeit der senkrecht zur Strömung projizierten Körperangriffsfläche  $A$  und der Anströmgeschwindigkeit  $v$  zu

$$F_w = c_w A \frac{\rho v^2}{2} \quad (5.24)$$

angegeben. Das Problem der Bestimmung des Widerstandsbeiwertes  $c_w$  führte zu Beginn der Versuchstechnik um die Jahrhundertwende zu Unstimmigkeiten, da für unterschiedliche Kugeldurchmesser unterschiedliche  $c_w$ -Werte ermittelt wurden. Erst die dimensionslose Be- trachtung des Widerstandsbeiwertes mit Hilfe der Reynolds-Zahl half, hierfür eine Erklärung zu finden.

Für die umströmte Kugel ist der  $c_w$ -Wert in Abb. 5.12 in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl aufgetragen. Auffallend ist vor allem der plötzliche Abfall des  $c_w$ -Wertes im Bereich der Reynolds-Zahlen  $Re > 10^5$ . Hierfür ursächlich ist der Umschlag der Grenzschicht an der Kugeloberfläche von der laminaren zur turbulenten.

Durch die einsetzenden Schwankungsbewegungen kommt es zu einem Quertransport des Grenzschichtmaterials und damit zu einer Verlagerung des Ablösungspunktes zur Kugelrück- seite. Dies führt zu einer beträchtlichen Verringerung des Druckwiderstands.



**Abb. 5.12:** Widerstandsbeiwerte für rotationssymmetrische Körper

Die Widerstandsbeiwerte für die umströmte Kugel können in Anlehnung an die Abb. 5.12 in folgende Bereiche unterteilt werden:

$$\text{Stokes: } C_w = \frac{24}{Re} \quad (5.25)$$

$$\text{Newton: } C_w \approx 0,44 \quad \text{für} \quad 10^3 < Re < 10^5$$

$$\text{Übergang: } C_w = \frac{24}{Re} + 4 \cdot Re^{-\frac{1}{2}} + 0,4 \quad (5.26)$$

Kenntnisse des Kugelwiderstandes werden benötigt zur Bestimmung der Fallgeschwindigkeit von Regentropfen in Luft oder von Kugeln (Sandkörnern) in Flüssigkeit und die Steiggeschwindigkeit von Gasblasen in einer flüssigen Umgebung. Für den großen Anwendungsbereich der Sedimentation, z.B. auf Kläranlagen, sind Kenntnisse über das Absetzverhalten der zu sedimentierenden Partikel notwendig. Häufig handelt es sich dabei um unregelmäßig geformte Partikel, deren Dichte sich durch den hohen Wassergehalt nur unwesentlich von Wasser unterscheidet. Bei der Dimensionierung von Absetzbecken können die Bedingungen für diese Mehrphasenströmungen durch die konstruktive Gestaltung verbessert werden.

Von noch größerer Bedeutung für technische Anwendungen ist die Umströmung des Zylinders mit Kreisquerschnitt. Wie aus Abb. 5.13 zu ersehen, zeigt das Widerstandsverhalten einen ähnlichen Verlauf wie bei der Umströmung der Kugel.

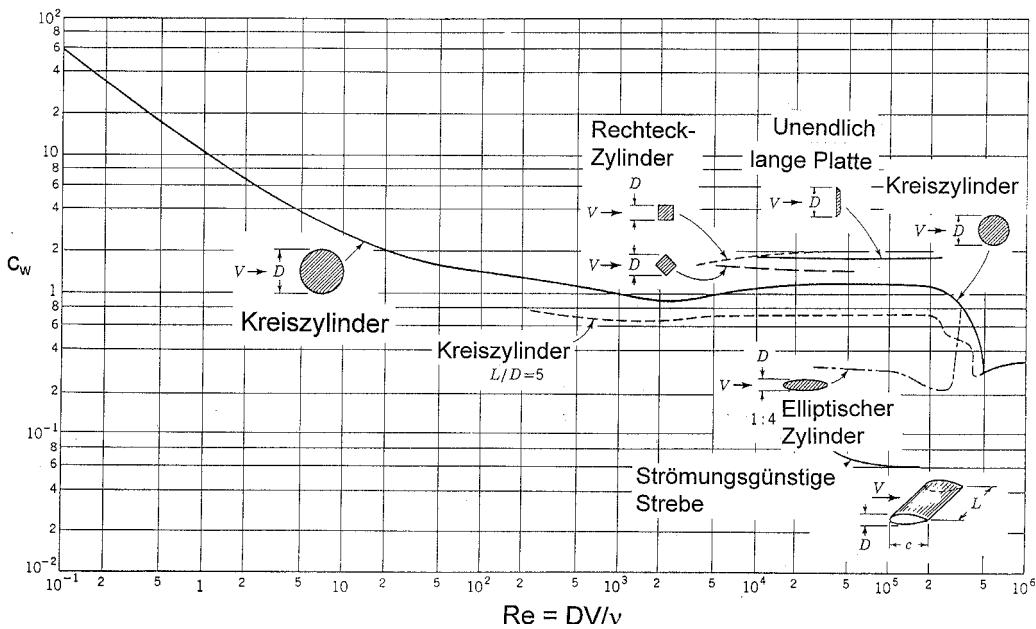


Abb. 5.13: Widerstandsbeiwerte für zylindrische Körper

Wesentlich an der Umströmung von Zylindern großer Länge (Schornsteine, Drähte) ist, dass infolge einer fehlenden Abreißkante die Wirbelablösung an Ober- und Unterseite alternierend erfolgt. Dadurch werden jeweils Querkräfte auf den Zylinder ausgeübt, der unter der Frequenz der Wirbelablösung zum Schwingen angeregt wird.

Für große Reynolds-Zahlen kann beim Zylinder die Wirbelablösefrequenz  $f$  mit Hilfe einer dimensionslosen Kennzahl

$$\text{Str} = \frac{f d}{v} \quad (5.27)$$

nach Strouhal berechnet werden. Für Reynolds-Zahlen  $Re > 10^3$  bleibt mit  $\text{Str} = 0,2$  diese Kennzahl konstant.

Weitere Widerstandsbeiwerte von praktischer Bedeutung:

Quadratische Platte	$c_w = 1,0$
Rechteck ( $b \rightarrow \infty$ )	$c_w = 2,01$
Kreisplatte	$c_w = 1,11$

Bei der Ablösung an vorgegebenen Kanten wie bei den oben angeführten Platten kann der  $c_w$ -Wert mit Hilfe der Potentialtheorie (s. Kap. 6) bestimmt werden. Beim Rechteck unendlicher Breite ist der erhöhte  $c_w$ -Wert dadurch erklärbar, dass infolge der behinderten seitlichen Umströmung an der Plattenvorderseite der Druck durch den Staudruck geprägt wird und an der Plattenrückseite ein Unterdruck in etwa gleicher Größenordnung entsteht. Dieser wird durch die erhöhte Geschwindigkeit an der Plattenkante erzeugt.

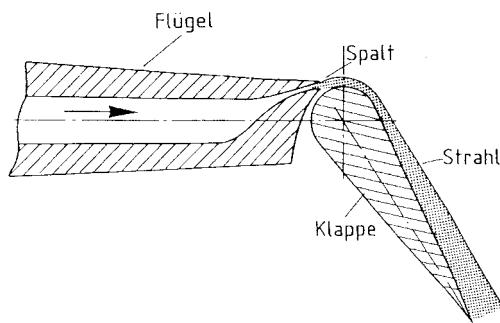
Abschließend noch der Hinweis auf die  $c_w$ -Beiwerte der Automobile, welche ja möglichst strömungsgünstig gebaut werden. Bereits der VW-Käfer wies einen Beiwert  $c_w = 0,4$  auf. Da

beim Umströmen infolge der wesentlich längeren Strombahn an der Körperoberseite ein Unterdruck entstand, wurde mit zunehmenden Geschwindigkeiten die Bodenhaftung verringert. Dass konstruktiv dem Widerstandsbeiwert Grenzen gesetzt sind, zeigt der schlanke Rotationskörper mit  $c_w = 0,1$ .

### 5.3.2 Wandstrahlen

Von besonderer Bedeutung ist das Verhalten von Strahlen in der Nähe einer festen Oberfläche. Da der Strahl bestrebt ist, seinen Energiegehalt zu konservieren, hat er die Tendenz, sich an eine feste Berandung anzulegen. Dies gilt allgemein auch für Tauchstrahlen, wenn die Einmischung an den Strahlrändern durch die Nähe einer festen Berandung behindert wird.

Eine besondere Strahleigenschaft wird durch den Coanda-Effekt dokumentiert. Ein freier Strahl, z.B. ein Wasserstrahl aus der Wasserleitung, wird in seiner Richtung abgelenkt, wenn er in die Nähe einer konvexen Oberfläche gerät. Am Wasserstrahl ist dies leicht durch die Umlenkung mit einem Finger zu demonstrieren, wenn dieser senkrecht zur Strömungsrichtung an den Wasserstrahl gehalten wird. Eines der bekanntesten Anwendungsbeispiele für diesen Effekt ist die Beeinflussung der Außenströmung an der Landeklappe eines Tragflügels (Abb. 5.14). Hierzu wird ein Luftstrahl über eine zylindrische Oberfläche am Beginn der Klappe ausgeblasen. Er folgt dieser vorgegebenen Berandung und fließt längs der Klappenkontur ab. Die durch den Strahl mitgerissene Außenströmung wird dadurch am Abreißen gehindert.



**Abb.: 5.14:** Coanda-Effekt am Tragflügel

Am Lehrstuhl für Hydraulik und Gewässerkunde der TU München ist es durch Untersuchungen mit einem toroidalen Wandstrahl gelungen, eine ablösungsfreie Umlenkung eines vertikal aufwärts gerichteten Strahles in eine horizontale radiale Bewegung zu erreichen. Dazu wurde am Beginn einer durch einen Torus gebildeten Aufweitung eine runde Scheibe am Ende des Rohres montiert (Abb. 5.15).

Der dadurch entstehende Ringspalt verleiht der Rohrströmung Strahlcharakter. Nach dem Passieren des Ringraums versucht der Strahl aus seiner Umgebung Flüssigkeit einzumischen. Diese Einmischung ist längs der vorgegebenen festen Berandung nicht möglich. Deshalb hält der Strahl an seiner Außenseite am Torus und löst sich trotz der erzwungenen geometrischen Aufweitung nicht ab. Die Einmischung erfolgt allein an der Strahlinnenseite. Dadurch wird eine sehr effektive Verzögerung eingeleitet.

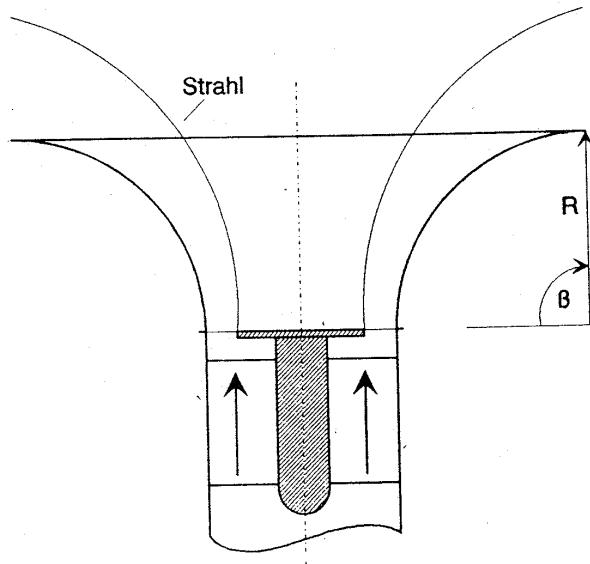


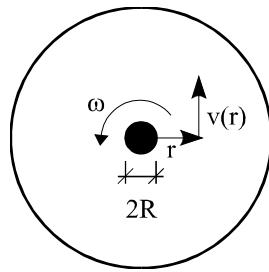
Abb. 5.15: Coanda-Tulpe

Weitere Untersuchungen haben ergeben, dass die verwendete Scheibe nicht am Rohrende angebracht werden muss. Der Effekt wird auch erzielt, wenn die Scheibe im Bereich der Erweiterung angebracht wird. Dadurch wird die im Ringspalt erzwungene Beschleunigung vermieden. Im Bereich der Aufweitung kann die Austrittsgeschwindigkeit wegen der Haftung des Strahls an der Berandung sogar unter die Rohrgeschwindigkeit abfallen.

Der Effekt des Anlegens an eine rotationssymmetrische Aufweitung kann auch durch eine Verdrallung der Strömung in einer sog. Wirbelkammer erzielt werden. Hier bewirkt die aufgezwungene Radialkomponente das Anhaften an der Wand. Die Eigenschaften von Flüssigkeitsstrahlen wurden dazu genutzt, sog. **Fluidikelemente** für Steuerungen zu bauen. Die Wirkung des Coanda-Effekts wurde als Wandstrahlelement, die der Wirbelkammer als Wirbelkammerdiode eingesetzt. Solche Elemente sind das mechanische Äquivalent zu den elektronischen Bauteilen, die sich heute weitestgehend für die Steuerung durchgesetzt haben.

## Formelzeichen zu Kapitel 5

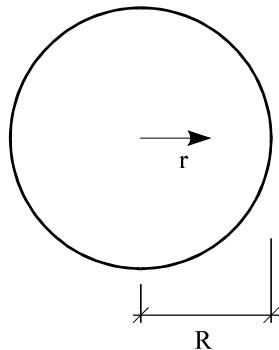
Zeichen	Benennung	Einheit
A	Fläche	$\text{m}^2$
b	Breite	m
$c_w$	Widerstandsbeiwert	-
d	Durchmesser	m
$F_w$	Widerstandskraft	N
h	Höhe	m
<b>i, j, k</b>	Einheitsvektoren	-
<b>k</b>	Vektor der Massenkraft	N / (kg/m <sup>3</sup> )
p	Flüssigkeitsdruck	Pa
Q	Ab-, Durchfluss	$\text{m}^3/\text{s}$
r	Radius	m
Re	Reynoldszahl	-
Str	Strouhal-Zahl	-
<b>v</b>	Geschwindigkeitsvektor	$\text{m}/\text{s}$
$\bar{v}$	mittlere Geschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$v_x, v_y, v_z$	Komponenten der Geschwindigkeit im kartesischen Koordinatensystem	$\text{m}/\text{s}$
$v_*$	Schubspannungsgeschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$\delta$	Grenzschichtdicke	m
$\delta_*$	Verdrängungsdicke	m
$\eta$	dynamische Zähigkeit	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
$\nu$	kinematische Zähigkeit	$\text{m}^2/\text{s}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg}/\text{m}^3$
$\tau$	Spannung	$\text{N}/\text{m}^2$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	1/s

**Aufgabe 5.1**

In ein sehr großes Rundbecken wird ein kleiner Zylinder mit dem Radius  $R$  eingetaucht, der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht und folgende stationäre Strömung im Becken erzeugt:

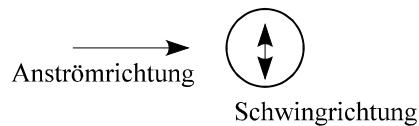
$$v(r) = \omega \cdot \frac{R^2}{r}$$

- Berechnen Sie Zirkulation und Rotation des Geschwindigkeitsfeldes.
- Bestimmen Sie den Wasserspiegel  $y(r)$ .
- Welchen Einfluss hat die Zähigkeit des Fluids auf die Lage des Wasserspiegels?

**Aufgabe 5.2**

Ein zylindrisches Gefäß ist mit Wasser gefüllt und wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine lotrecht stehende Rotationsachse gedreht. Geben Sie für den stationären Fall an:

- Wasserspiegel  $y(r)$
- Energiedichte  $H(r)$
- Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lösung der Aufgabe 5.1.

**Aufgabe 5.3**

Ein Zylinder wird senkrecht zu seiner Achse von einem zähen Fluid angeströmt. Dabei schwingt der Zylinder senkrecht zur Anströmrichtung des Fluids hin und her. Wie kommt diese Pendelbewegung zustande?

**Aufgabe 5.4**

Warum reduzieren sich die Schubspannungen an einer längsangeströmten Platte mit zunehmender Plattenlänge, wenn sich eine laminare Grenzschicht einstellt? Was ändert sich bei einer turbulenten Grenzschicht?

**Aufgabe 5.5**

Warum ist es möglich, mit Hilfe einer Wasserstrahlpumpe ein Vakuum zu erzeugen?

**Aufgabe 5.6**

Die stationäre Steiggeschwindigkeit einer Kugel ( $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ) beträgt in ruhendem Wasser  $v_s = 0,5 \text{ m/s}$ .

- Berechnen Sie den Kugeldurchmesser.
- Wie würde sich diese Kugel in einer Luftströmung bewegen, die mit einer Geschwindigkeit von  $v_L = 2 \text{ m/s}$  aufsteigt?  
( $\rho_L = 1,22 \text{ kg/m}^3$ ;  $v_L = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ )

**Aufgabe 5.7**

Warum löst sich eine laminare Grenzschicht leichter ab als eine turbulente?

**Aufgabe 5.8**

Warum ist der Widerstandsbeiwert  $c_w$  gerundeter Körper stärker von der Reynoldszahl Re abhängig als derjenige von kantigen Körpern?

**Aufgabe 5.9**

Durch welche grundsätzlichen Maßnahmen lassen sich der Reibungs- und der Druckwiderstand im Fahrzeugbau reduzieren?

**Aufgabe 5.10**

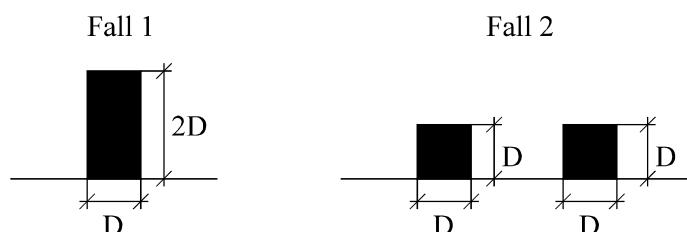
Ein PKW mit einer Querschnittsfläche von  $A = 2 \text{ m}^2$  und einem Widerstandsbeiwert von  $c_w = 0,4$  fährt mit einer Geschwindigkeit von 160 km/h.

- Berechnen Sie die zur Überwindung des Luftwiderstandes notwendige Leistung
- Wie schnell könnte ein LKW ( $A = 10 \text{ m}^2$ ,  $c_w = 0,6$ ) gleicher Leistung fahren, wenn diese Leistung ausschließlich zur Überwindung des Luftwiderstandes zur Verfügung steht?

**Aufgabe 5.11**

Zwei Zylinder mit dem Längenverhältnis  $L/D = 1$  werden in zwei verschiedenen Lagen im Windkanal untersucht. Im Fall 1 stehen sie aufeinander, im Fall 2 stehen sie senkrecht zur Anströmrichtung nebeneinander, und zwar so weit entfernt, dass ihre wechselseitige Beeinflussung vernachlässigbar ist.

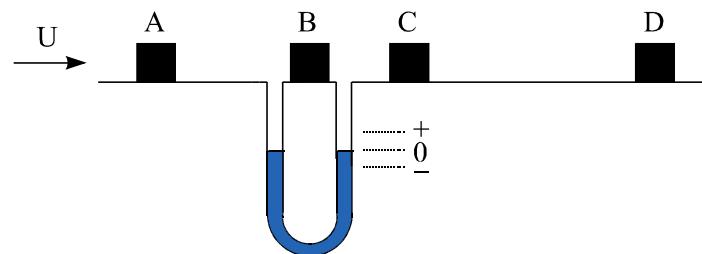
- Für welche Anordnung ergibt sich ein geringerer Widerstandsbeiwert?



**Aufgabe 5.12**

Ein quaderförmiger Körper liegt auf einer ebenen Wand und wird mit konstanter Geschwindigkeit  $U$  angeströmt. Bei welcher Lage des Körpers ergibt sich für die Druckdifferenz am rechten Schenkel des Manometers eine

	A	B	C	D
Nullanzeige?				
negative Anzeige?				
positive Anzeige?				



## 6 Potentialströmung

Gegenstand der **Potentialtheorie** ist die zweidimensionale Behandlung der Strömung eines reibungsfreien und damit auch drehungsfreien Fluids. Da in diesem idealen Fluid keine Schubspannungen auftreten, ist im gesamten Strömungsfeld, demnach auch in Wandnähe, die Bernoulli'sche Konstante gleich groß. Trotz dieser weitgehenden Einschränkungen sind die Voraussetzungen des idealen Fluids für große Bereiche des realen Strömungsfeldes erfüllt. Dies insbesondere dann, wenn das betrachtete Strömungsfeld keine allzu große Ausdehnung hat und eine beschleunigte Bewegung vorliegt. Sie ist mit Sicherheit nicht erfüllt in Wandnähe, weil hier die sog. Haftbedingung greift. Eine Unterteilung des Strömungsfeldes in Bereiche, die als Potentialströmung betrachtet werden kann und solche, in denen die Reibungsfreiheit nicht toleriert werden kann, ist also eine erste wichtige Erkenntnis.

### 6.1 Potentialtheorie

Zunächst gilt es ein potentialtheoretisches Strömungsfeld zu beschreiben. Reibungslose und drehungsfreie Strömungen sind Potentialströmungen im Sinne der mathematischen Strömungslehre. Für diese existiert die von Helmholtz eingeführte Potentialfunktion  $\Phi$ , das sog. **Geschwindigkeitspotential**. Für die Geschwindigkeitskomponenten gilt

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi \quad (6.1)$$

In der zweidimensionalen Strömung sind z.B. im kartesischen Koordinatensystem mit den Richtungen x und y die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  durch die partielle Ableitung von  $\Phi$  gegeben:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (6.2)$$

Das Geschwindigkeitspotential hat demnach die Einheit  $m^2/s$ . Auf den Äquipotentiallinien ist die Größe des Potentials konstant, es gilt also  $\Phi(x,y) = \text{const}$ . Im quellenfreien Strömungsfeld gilt zudem die Kontinuitätsbedingung nach Gl. 4.5, also

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

welche für die beiden Geschwindigkeitskomponenten wie folgt lautet

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.3)$$

Durch das Einsetzen von Gl. 6.1 in die Kontinuitätsbedingung wird über

$$\text{div}(\mathbf{grad}(\Phi)) = \Delta \Phi = 0$$

daraus die **Laplacesche Differentialgleichung** erhalten, welche in der Komponentendarstellung auf die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.4)$$

führt. Diese Dgl. beschreibt ein Strömungsfeld, in welchem zwei ausgezeichnete Linienscharen, die sog. **Strom- und Äquipotentiallinien** senkrecht aufeinander stehen. Strom- und Potentiallinien bilden das sog. Strömungsbild aus sich rechtwinklig kreuzenden Linienscharen. Da senkrecht zur Berandung keine Strömung erfolgt, muss dort  $\partial \Phi / \partial n = 0$  sein. Die Berandung ist demnach zugleich eine Stromlinie. Ein Strömungsfeld ist dann bestimmt, wenn

$$\Phi = \Phi(x, y)$$

bekannt ist.

Unter Ziff. 3.8 wurde bereits gezeigt, dass die Stromlinien durch die Stromfunktion  $\Psi$  beschrieben werden können. Bezüglich der Stromfunktion gilt nach Gl. 3.22:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Werden diese Ausdrücke in die Gleichung (3.15) für die Stromlinie eingesetzt, so ist

$$v_x dy - v_y dx = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot dx = d\Psi = 0$$

und damit  $\Psi = \text{const.}$  Das Strömungsbild besteht demnach aus Linien  $\Phi = \text{const.}$  und  $\Psi = \text{const.}$  Da die Potentialströmung voraussetzungsgemäß drehungsfrei ist, gilt nach Gleichung (3.12)

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

und mit Gleichung (3.22) dann auch

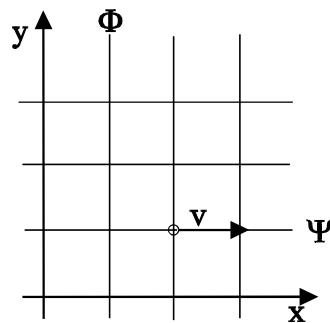
$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Delta \Psi = 0 \quad (6.5)$$

Für die ebene drehungsfreie Strömung erfüllt auch die Stromfunktion  $\Psi$  die Laplacesche Gleichung.  $\Phi$  und  $\Psi$  sind austauschbar.

## 6.2 Einfache Potentialströmungen

### 6.2.1 Parallelströmung

Die denkbar einfachste Strömung ist eine **Parallelströmung**, bei der lediglich eine Translationsbewegung ausgeführt wird. Für die zweidimensionale Bewegung in der x-y-Ebene sei dafür vorgegeben, dass die Bewegung lediglich in Richtung der positiven x-Achse stattfindet. Die Komponenten des Strömungsfeldes sind damit nach Abb. 6.1  $v_x = v$ ;  $v_y = 0$ ;



**Abb. 6.1:** Parallelströmung

Nach Gl. 6.2 gelten dann für die Strom-und Äquipotentiallinien in diesem Feld folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Die Integration führt direkt zu allgemeinen Lösungen, wobei hier die Integrationskonstanten nicht bestimmt werden, da hierzu keine näheren Angaben vorliegen.

$$\Phi = v_x x + c_1 \quad (6.6)$$

$$\Psi = v_x y + c_2 \quad (6.7)$$

Äquipotentiallinien sind damit Parallelen zur y-Achse, Stromlinien Parallelen zur x-Achse.

### 6.2.2 Quellen- und Senkenströmung

Quellen und Senken sind Begriffe der mathematischen Strömungslehre, welche in Strömungsfeldern singuläre Punkte markieren, aus denen heraus eine radiale Strömung ihren Anfang (Quelle) oder ihr Ende (Senke) nimmt. Damit ist bereits angedeutet, dass die Beschreibung dieser Strömungsfelder am besten in Polarkoordinaten erfolgt. Bei der Anwendung im Bauingenieurwesen können die abstrakten mathematischen Begriffe durch real existierende Strömungsformen ersetzt werden. Beide Strömungsarten sind Grundlagen für die Simulation von

Grundwasserströmungen. Die ebene Senkenströmung entspricht der Anströmung des **Vertikalbrunnens**, die ebene Quellenströmung der Abströmung aus dem **Schluckbrunnen**. Bei der Quellenströmung nach Abb. 6.2 ist die Radialkomponente  $v_r$  vom Nullpunkt weggerichtet, bei der Senkenströmung ist es umgekehrt. Durch den Vorzeichenwechsel für die Quellenstärke  $q$  können die Gleichungen für die Senkenströmung gewonnen werden. Die Einspeisung im Nullpunkt des Koordinatensystems kann man sich durch eine von unten angeordnete Rohrleitung vorstellen.

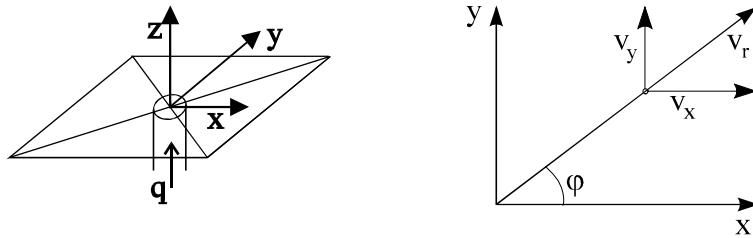


Abb. 6.2: Quellenströmung

In Polarkoordinaten können für die Quelle die Geschwindigkeiten wie folgt dargestellt werden:

$$v_r = \frac{q}{2\pi r} \quad v_\varphi = 0; \quad (6.8)$$

Bei der Übertragung in das kartesische Koordinatensystem sind die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = v_r \cos \varphi = (q / 2\pi r) \cos \varphi; \quad v_y = v_r \sin \varphi; \quad (6.9)$$

Die Gleichung für die Radialkomponente wurde über die Kontinuitätsbedingung aus der Quellenstärke  $q = v_r 2\pi r$  ermittelt. Da die Quellenstärke als Randbedingung vorgegeben ist und  $2\pi$  eine konstante Größe darstellt, gilt

$$q / 2\pi = c = v_r r = \text{const.} \quad (6.10)$$

Integriert wird hier wieder über die Beziehungen mit den Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  nach Gl. 6.9, wobei eine kleine Umformung wegen  $r$  vorgenommen wird.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = \frac{q}{2\pi r} \left( \frac{r}{r} \right) \cos \varphi = \frac{q}{2\pi} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (6.11)$$

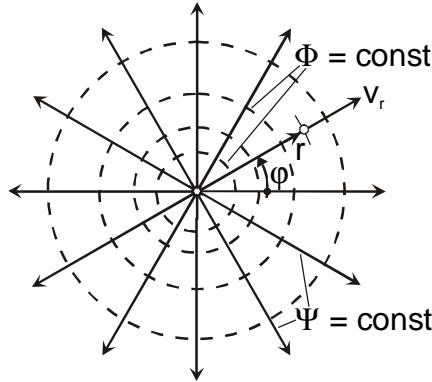
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_y = \frac{q}{2\pi r} \left( \frac{r}{r} \right) \sin \varphi = \frac{q}{2\pi} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.12)$$

Nach der Integration folgen auch hier wieder die Beziehungen für die Äquipotential- und Stromlinien zu

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \frac{q}{2\pi} \ln r = c \ln r \quad (6.13)$$

$$\Psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{q}{2\pi} \varphi = c \cdot \varphi \quad (6.14)$$

In Abb. 6.3 sind die beiden Linienscharen in einem kartesischen Koordinatensystem eingetragen. Die Stromlinien laufen vom Ursprung radial nach außen, die Äquipotentiallinien sind konzentrische Kreise.



**Abb. 6.3:** Strom- und Äquipotentiallinien für die Quellenströmung

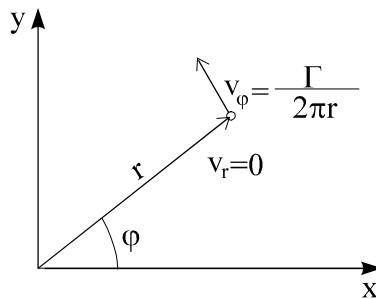
Durch die Überlagerung der Translations- mit der Quellen- oder Senkenströmung entstehen für die Grundwasserhydraulik wichtige Strömungsbilder (s. Ziff. 6.5).

### 6.2.3 Potentialwirbel

Durch Vertauschen von Strom- und Potentialfunktion kann die Quellenströmung in die Strömung für den (geraden) Potentialwirbel übergeführt werden. Da dieser der Laplaceschen Gleichung genügt, ist die dabei entstehende Strömung voraussetzungsgemäß rotationsfrei. In Anlehnung an die Gl. 6.13 und 6.14 werden dann folgende Funktionen erhalten

$$\Phi = c \varphi \quad (6.15)$$

$$\Psi = c \ln r \quad (6.16)$$



**Abb.: 6.4:** Potentialwirbel

Zu beachten ist, dass in Abb. 6.4 die Drehung des Potentialwirbels mathematisch positiv, also entgegen den Uhrzeigersinn, angegeben ist. Die Geschwindigkeitsverteilung im Potentialwirbel ist

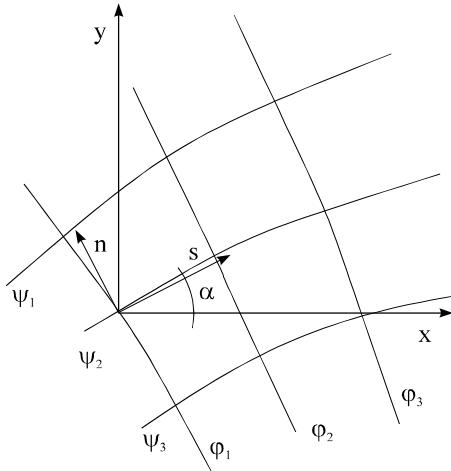
$$v_\varphi = \frac{c}{r} \quad (6.17)$$

Die durch diese Gleichung beschriebene Wirbelbewegung stellt eine wichtige Strömungsform zum Verständnis gerade der Verluste an kinetischer Energie im Strömungsfeld dar. Dies klingt zunächst widersprüchlich, da der Potentialwirbel für die reibungsfreie Strömung abgeleitet worden ist. Tatsächlich entstehen in der realen Strömung, z.B. an den freien Trennschichten Wirbelsysteme, welche die Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. 6.17 aufweisen. Näher wird darauf noch unter Ziff. 6.4 eingegangen.

Durch die Überlagerung des Potentialwirbel mit der Quellen- oder Senkenströmung entstehen Wirbelquellen bzw. -senken. Diese zweidimensionale Spiralbewegung liefert wichtige Erkenntnisse über die gegenseitige Abhängigkeit von Druck- und Geschwindigkeitsfeld in Strömungsmaschinen. Das wirkliche Strömungsfeld wird durch eine zusätzliche Axialkomponente geprägt. Mit der Kombination von Translationsströmung und Potentialwirbel wird die Umströmung des drehenden Zylinders simuliert. Dabei wird wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeiten an Ober- und Unterseite des Zylinders eine Querkraft erzeugt (**Magnus-Effekt**).

### 6.3 Strömungsbilder für vorgegebene Randbedingungen

Die unter Ziff. 6.2 behandelten einfachen Strömungen beschreiben Äquipotential- und Stromlinien für ein unbegrenztes Strömungsfeld. Allgemein wird zunächst das Geschwindigkeitsfeld bestimmt, das bei bekannter Geometrie (Randstromlinien) vorgegeben ist. Analytische Lösungen für ein vorgegebenes Strömungsfeld sind schwierig und Gegenstand der Funktionentheorie (konforme Abbildung). Darauf wird in diesem Rahmen nicht weiter eingegangen. Es liegen allerdings für eine Vielzahl von Strömungen Strömungsbilder vor. Ein Ausschnitt aus einem Strömungsbild ist in Abb. 6.5 dargestellt.



**Abb. 6.5:** Strom- und Äquipotentialallinien

Das Strömungsbild lässt wichtige Rückschlüsse auf die Geschwindigkeiten im Strömungsfeld zu. Da senkrecht zu den Stromlinien kein Volumenstrom stattfinden kann, gilt für die Richtung normal zu den Stromlinien allgemein

$$\mathbf{v} = \frac{d\Psi}{dn} \quad (6.18)$$

Zwischen zwei Stromlinien  $\Psi_2$  und  $\Psi_1$  gilt demnach für den Durchfluss

$$d\Psi = q = v \cdot dn \quad (6.19)$$

In einem Strömungsbild, bei dem die Abstände zwischen den einzelnen Stromlinien  $\Psi$  mit  $dn$  und diejenigen zwischen den Äquipotentiallinien  $\Phi$  mit  $ds$  bezeichnet werden, wird ein quadratisches Gitter aus den beiden Linienscharen für  $dn = ds$  erreicht. Dies kann ein wesentliches Hilfsmittel für die Konstruktion dieser Linienscharen sein, da auch bei gekrümmten Linien krummlinige Quadrate gebildet werden. Unter dieser Voraussetzung gilt die Identität

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{d\Phi}{ds} \quad (6.20)$$

Beispielhaft aufgezeigt werden die daraus zu folgernden Rückschlüsse auf Eigenschaften der so gekennzeichneten Strömung anhand der Abb. 6.6.

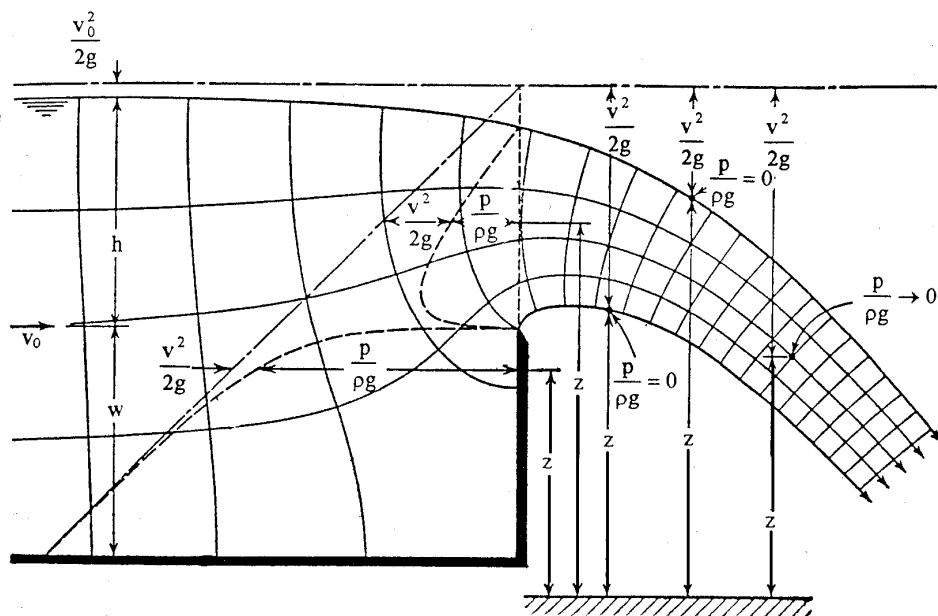


Abb. 6.6: Abfluss über ein Messwehr (nach Rouse)

In diesem Strömungsbild sind für den Abfluss über ein scharfkantiges Messwehr Strom- und Äquipotentiallinien so eingezeichnet, dass ein Netz von krummlinigen Quadern gebildet wird. Die Strömung weist eine freie Oberfläche bei der Anströmung zum Wehr auf. Nach dem Verlassen der Wehrkante bildet sich ein freier Überfallstrahl aus. Die Strömung wird nur längs der festen Berandung im Sohlenbereich des Gerinnes vor dem Wehr und an der vertikalen Wand über die Wehrhöhe  $w$  durch Reibung beeinflusst. An der Phasengrenzfläche flüssig-gasförmig können Schubspannungen vernachlässigt werden.

Wichtig ist, dass in jedem Punkt des Strömungsfeldes die Gleichung von Bernoulli erfüllt ist, dass also die Summe aus Ortshöhe, Druckhöhe und Geschwindigkeitshöhe jeweils eine konstante Größe ergibt. Ist somit an einem Punkt des Strömungsfeldes, z.B. an der Oberfläche des Überfallstrahls, die Geschwindigkeit bekannt, dann ist auch die Bernouillsche Konstante, in diesem Fall die Lage der Energiehöhe, gegeben. Denn an der freien Oberfläche ist die Druckhöhe identisch mit der Ortshöhe. Damit ist zugleich auch im Innern des Strömungsfeldes die Zuordnung der drei Terme der Bernoulli-Gleichung zueinander bekannt.

Wie diese im einzelnen zu handhaben sind, regelt die Potentialtheorie, denn sie bestimmt durch die Stromlinien die Geschwindigkeitsverteilung. Je geringer in diesem Strömungsbild die Abstände zwischen den Stromlinien sind, desto größer ist die jeweilige Geschwindigkeit. An der Strahlunterseite ist in Abb. 6.6 beispielsweise der Abstand zwischen den Stromlinien am geringsten. Nach Gl. 6.18 sind deshalb dort die Geschwindigkeiten am größten. Über die Geschwindigkeitsverteilung kann die Druckverteilung im Innern des Strömungsfeldes errechnet werden. Im Beispiel sind die Druckverteilungen angetragen im Strahl über der Wehrkante und über die Höhe des Wehrs. Da unmittelbar an der Wehrkante als Randbedingung der Atmosphärendruck herrscht, ist ein entsprechender Druckabfall zu verzeichnen. Die nichtlineare Druckverteilung über der Wehrkante ist typisch für ein Strömungsfeld mit gekrümmten Strombahnen.

Noch eine Anmerkung zur festen Berandung an der Sohle vor dem Wehr. Das Strömungsbild weist hierfür auch unmittelbar an der Wand endliche Geschwindigkeiten auf, die in der vom Wehr unbeeinflussten Zone am linken Bildrand der mittleren Anströmgeschwindigkeit  $v_0$  entsprechen. Der feste Rand als Stromlinie genügt der Randbedingung  $v_n = 0$ , die Tangentialgeschwindigkeit  $v_s$  ist allein durch die Richtung der Berandung bestimmt und von endlicher Größe, also  $v_s \neq 0$ . Deshalb wird diese Randbedingung in der Strömungslehre als **kinematische Randbedingung** bezeichnet, da sie allein den Ansprüchen der Stromlinie gerecht wird.

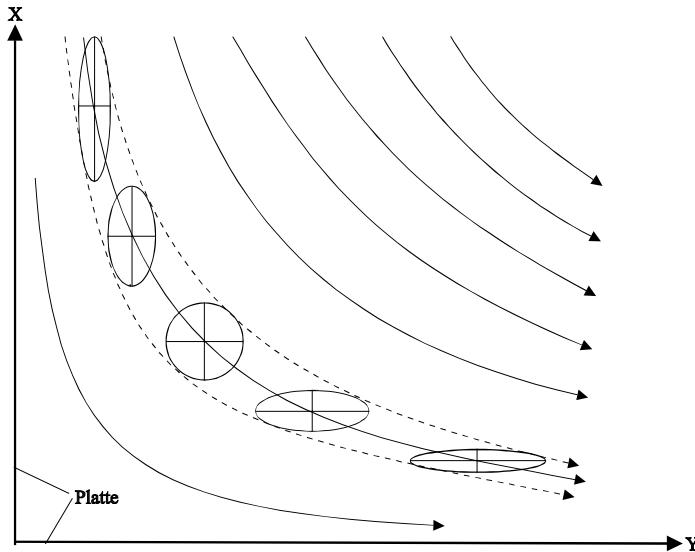
Zur Konstruktion derartiger Strömungsbilder bediente man sich früher unterschiedlichster, auch grafischer Verfahren. Heute ist das zweidimensionale Strömungsfeld auch numerisch nachzuvollziehen.

## 6.4 Grenzen der Anwendbarkeit der Potentialtheorie

Die reibungsfreie Behandlung von Strömungsproblem hat ihre Grenzen dort, wo die Beschreibung der Strömung mit Hilfe der Potentialtheorie zu Ergebnissen führt, die im Widerspruch zur Erfahrung stehen. Besonders deutlich wurde dies bei der Simulation der Umströmung eines Kreiszylinders. Hier zeigt das potentialtheoretisch ermittelte Strömungsbild eine symmetrische Umströmung des Kreisprofils. Die Strömung weist nach diesem Ergebnis an der Vorder- und Rückseite des Profils einen Staupunkt auf. Wegen der Symmetrie im Strömungsfeld sind deshalb auch die Druckverteilungen längs der Vorder- und Rückseite identisch, so dass potentialtheoretisch kein Widerstand auftritt (d'Alambertsches Paradoxon).

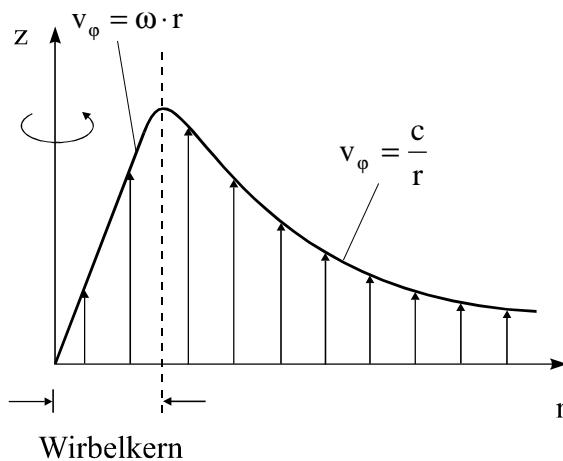
Die Potentialtheorie ist demnach nicht in der Lage, Einflüsse der Körpergeometrie richtig zu interpretieren, da die durch Druckanstiege in der Grenzschicht ausgelösten Umlagerung im Strömungsfeld nicht erkannt werden können. Dies wird an einem einfachen Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 6.1:** Gesucht ist das Strömungsbild für die Stromfunktion  $\Psi = a(x^2 - y^2) = \text{const.}$  Die zugehörigen Stromlinien sind gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten die Diagonalen in jedem Quadranten sind ( $y = \pm x$ ). Betrachtet man allein das Strömungsbild, das zwischen zwei dieser Asymptoten entsteht, so wird damit die Strömung im Bereich zweier Platten beschrieben, die im rechten Winkel zueinander stehen (Abb. 6.7). Mit eingezeichnet sind in der Darstellung der Abb. 6.7 die Achsen der Flüssigkeitsteilchen, welche sich zwischen zwei Stromlinien bewegen. Die Lage der Achsen bleibt bei dieser Bewegung erhalten, die Flüssigkeitsteilchen erfahren demnach keine Rotation, erfüllen daher die Voraussetzung der Rotationsfreiheit. Trotzdem ist auch dieses Strömungsbild wirklichkeitsfremd. Im Bereich der Ecke erhöht sich der Abstand zwischen den Stromlinien. Die Strömung wird deshalb in Richtung der Ecke verzögert. Deshalb weist die reale Strömung im Eckbereich eine Ablösungszone auf.



**Abb. 6.7:** Strömung in einer rechtwinkeligen Ecke

Auf die Bedeutung des Potentialwirbels wurde bereits hingewiesen. Nach Gl. 6.17 wächst die Tangentialgeschwindigkeit mit kleiner werdendem Radius an. Da für  $r \rightarrow 0$  die Geschwindigkeit  $v_\phi \rightarrow \infty$  gehen müsste, kann die Wirbelbewegung nur bis zu einem Grenzwert für  $r$  aufrecht erhalten werden. Da die viskosen Schubspannungen im realen Fluid proportional dem Geschwindigkeitsgradienten sind, würden sie mit Annäherung an die Drehachse auch unendlich groß. Innerhalb dieses Bereiches dreht die Flüssigkeit wie ein fester Körper, ist also nicht mehr drehungsfrei. Für das Verständnis der Entstehung von Verlusten ist diese Tatsache sehr wichtig. Innerhalb des Wirbels treten sehr hohe Gradienten und deshalb auch Schubspannungen bis zum Erreichen des sog. Wirbelkerns auf. Im lediglich rotierenden Flüssigkeitsbereich werden bekanntlich keine Spannungen erzeugt.



**Abb. 6.8:** Geschwindigkeitsverteilung in einem Wirbel

In Abb. 6.8 ist die Geschwindigkeitsverteilung in einem Wirbel gezeigt. Dieser dreht in einer x-y-Ebene, seine Drehachse ist demnach die z-Achse. Im Außenbereich folgt die Geschwin-

digkeitsverteilung dem durch Gl. 6.17 beschriebenen Potentialwirbel. Mit Annäherung an die Drehachse werden die Geschwindigkeitsgradienten so hoch, dass sich der Wirbelkern wie ein Festkörper dreht. Dann entspricht die Geschwindigkeitsverteilung mit  $v_\phi = r \cdot \omega$  der erzwungenen Rotation. Der Potentialwirbel mit rotierendem Wirbelkern wird in der Literatur als **Oseen-Wirbel** bezeichnet.

Die Wirbelstärke wird nach Gleichung 3.13 durch die Zirkulation ausgedrückt. Für den Potentialwirbel ist wegen

$$\oint v_\phi \cdot ds = \Gamma$$

längs  $r = \text{const.}$  auch  $v_\phi = \text{const.}$ , so dass für  $r = r_1$

$$\Gamma = \frac{c}{r_1} \cdot \int ds = 2 \cdot \pi c \quad (6.21)$$

ist. Beim Potentialwirbel ist die Zirkulation (obwohl Potentialströmung) von Null verschieden, wenn der Wirbelkern vom Umlaufintegral erfasst wird. Der Wirbelkern ist rotationsbehaftet.

Bei Wirbeln, die an der freien Oberfläche zu beobachten ist, senkt sich die Wasseroberfläche mit zunehmender Umfangsgeschwindigkeit immer weiter ein. Findet gleichzeitig ein Wasserabfluss senkrecht zur Oberfläche statt, dies gilt z.B. für den Badewannenwirbel, dann wird der Wirbelbewegung eine Längskomponente der Geschwindigkeit aufgezwungen. Wir haben demnach einen typisch dreidimensionalen Strömungsvorgang vor uns.

## 6.5 Anwendung in der Grundwasserhydraulik

Hauptanwendungsgebiet der Potentialströmungen im Bereich des Bauingenieurwesens ist die Grundwasserhydraulik. Obwohl dort mit der Bewegung des Grundwassers auch ein zähes Fluid bewegt wird, kann diese Strömung doch mit Hilfe der Laplaceschen Gleichung 6.4 beschrieben werden. Ursache dafür ist das lineare Widerstandsverhalten dieser Art von Bewegung mit sehr kleinen Geschwindigkeiten. Für die Grundwasserhydraulik erfährt der abstrakte Begriff des Geschwindigkeitspotentials sogar eine anschauliche Deutung in Verbindung mit der Standrohrspiegelhöhe.

Die unter Ziff. 6.2 angeführten einfachen Strömungen erlangen hier durch die erlaubte Überlagerung von Einzellösungen eine überragende Bedeutung. Beispielhaft ist hier lediglich durch Abb. 6.9 die Überlagerung der Parallelströmung mit einer Senkenströmung aufgezeigt. Die Senkenströmung wird im Strömungsfeld des Grundwasserleiters direkt durch einen Förderbrunnen repräsentiert. Ergebnis weiterer Überlagerungen ist die sog. Doublette, also die Kombination eines Schluck- und Förderbrunnens in der Parallelströmung.

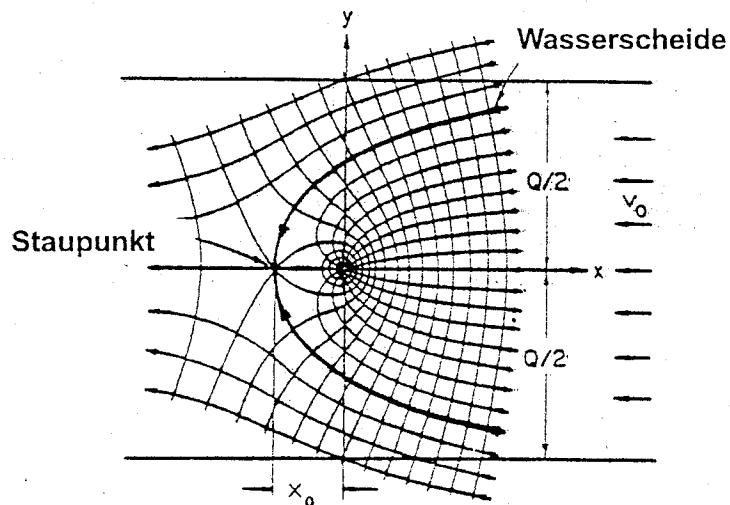


Abb. 6.9: Brunnen in Grundströmung

Bei dieser Anwendung soll die Entnahme von der Wiedereinleitung unbeeinflusst bleiben. Der Förderbrunnen ist daher oberstrom vom Schluckbrunnen angeordnet. Im umgekehrten Fall kann durch das Hintereinanderschalten dieser beiden Einrichtungen eine Insel in Strömungsfeld geschaffen werden. Diese Konfiguration bietet sich an, wenn kontaminiertes Grundwasser aus dem Grundwasserleiter entfernt werden muss.

Eine eigene Vorlesung über Grundwasserhydraulik wird für die Vertiefer des Wasserwesens angeboten.

## Formelzeichen zu Kapitel 6

Zeichen	Benennung	Einheit
c	Konstante Gl. 6.17	$\text{m}^2/\text{s}$
dn	Stromlinienabstand	m
ds	Abstand der Äquipotentiallinien	m
q	Quellenstärke	$\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$
v	Geschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$v_\phi$	Tangentialgeschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$v_r$	Radialgeschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$\Gamma$	Zirkulation	$\text{m}^2/\text{s}$
$\phi$	Winkel	-
$\Phi$	Geschwindigkeitspotential	$\text{m}^2/\text{s}$
$\Psi$	Stromfunktion	$\text{m}^2/\text{s}$

**Aufgabe 6.1**

Welche Bedingungen gelten an einem festen Rand für eine ideale und für eine reale Flüssigkeit?

**Aufgabe 5.2**

- Warum ist eine Potentialströmung wirbelfrei?
- Warum ist für ein inkompressibles Fluid eine Potentialströmung verlustfrei?

**Aufgabe 6.3**

Die Entfernung  $x_0$  zwischen Brunnen und dem in Abb. 6.9 eingezeichneten Staupunkt unterstrom des Brunnens ist in Abhängigkeit von der Entnahme  $Q$  und der Fließgeschwindigkeit  $v_0$  des Grundwasserstroms zu berechnen, wenn die Entnahme über die Höhe  $b$  des Grundwasserleiters erfolgt.

**Aufgabe 6.4**

Bei einer Doublette als Kombination von Förder- und Schluckbrunnen bildet die Wasserscheide, welche die Strömung zwischen den Brunnen vom unbeeinflussten Strömungsfeld abgrenzt, eine geschlossene Kurve. Sie repräsentiert zugleich eine Stromlinie  $\Psi = 0$ . Im kartesischen Koordinatensystem liegt die Achse des Schluckbrunnens bei  $(-a, 0)$ , die des Förderbrunnens bei  $(+a, 0)$ . Bei einer Grundwasserbewegung  $v_0$  in Richtung der positiven x-Achse werden die Stromlinien durch

$$\Psi = v_0 y + \frac{q}{2\pi} \left( \text{arc tan} \frac{y}{x+a} - \text{arc tan} \frac{y}{x-a} \right)$$

bestimmt. Die Lage der Wasserscheide und die Stromlinien der Strömung außerhalb der Wasserscheide sind im Bereich  $0 \leq x \leq 8$  und  $0 \leq y \leq 6$  zu bestimmen. Außerdem sind gegeben  $v_0 = 0,8$ ,  $q = 2\pi$  und  $a = 2,0$ .

## Literatur

Wie in Vorlesungsskripten üblich, sind im Text keine Literaturstellen angegeben. Eine Ausnahme sind Abbildungen, bei denen auf die Herkunft verwiesen wird. Sie sind in der Regel den nachstehend angeführten Lehrbüchern entnommen.

- Bollrich, G.: Technische Hydromechanik. Band 2,  
VEB-Verlag f. Bauwesen, Berlin 1988
- Bronstein, I. N. / Taschenbuch der Mathematik.  
Semendjajew, K. A. / Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1993
- Musiol, G. /  
Mühlig, H.
- Franke, P.-G.: Hydraulik für Bauingenieure.  
De Gruyter-Verlag, Berlin, New York 1974
- Guyon, E./  
Hulin, J.-P./  
Petit, L.: Hydrodynamik  
Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1997
- Kraatz, W.: Flüssigkeitsstrahlen.  
In: Technische Hydromechanik. Band 2, S. 237-327  
VEB-Verlag f. Bauwesen, Berlin 1988
- Miller, D. S.: Internal Flow Systems.  
(2. Aufl.) BHRA, Cranfield 1990
- Naudascher, E.: Hydraulik der Gerinne und Gerinnebauwerke.  
Springer-Verlag, Wien, New York 1992
- Preißler, G. /  
Bollrich, G.: Technische Hydromechanik. Band 1,  
VEB-Verlag f. Bauwesen, Berlin 1980
- Rouse, H.: Engeneering Hydraulics.  
Verlag John Wiley&Sons, Inc., New York, London 1950
- Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie.  
Verlag G. Braun, Karlsruhe 1965
- Spurk, J.H.: Strömungslehre-Einführung in die Theorie der Strömungen  
(4. Aufl.) Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1996
- Tietjens, O.: Strömungslehre. Band 1 und 2.  
Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960 und  
1970
- Truckenbrodt, E.: Fluidmechanik, Band 1 und 2.  
Springer-Verlag Wien, New York 1980