

Kapitel 1

Hydromechanik

1

1 Hydromechanik

1.1	Eigenschaften einer Flüssigkeit.....	3
1.2	Hydrostatik.....	5
1.2.1	Druck in einer ruhenden Flüssigkeit	5
1.2.2	Auftrieb.....	13
1.2.3	Der schwimmende Körper	18
1.2.4	Druckkräfte auf ebene Flächen	21
1.2.5	Druckkräfte auf gekrümmte Flächen	28
1.3	Hydrodynamik	33
1.3.1	Kinematische Grundlagen	33
1.3.2	Stromfadentheorie	36
1.3.3	Strömung mit Energieverlusten	55
1.4	Weiterführende Literatur	68

1.1 Eigenschaften einer Flüssigkeit

Die *Hydromechanik* ist die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten. Nach der Erfahrung unterscheiden sich Flüssigkeiten – und auch Gase – von den festen Körpern hauptsächlich dadurch, dass sie Formänderungen, die langsam und ohne Volumenänderung vor sich gehen, nur sehr geringen Widerstand entgegensetzen. Eine solche Formänderung erfährt zum Beispiel eine Flüssigkeit, die sich zwischen zwei Platten befindet, an diesen haftet und einer scherenden Belastung unterworfen wird (Abb. 1.1a). Das Verschieben der Teilchen gegeneinander erfolgt unter dem Einfluss von Schubspannungen (Abb. 1.1b) und dauert an, solange die Schubspannungen wirken. Eine Flüssigkeit ist daher ein Stoff, der einer scherenden Beanspruchung unbegrenzt nachgibt. Dies bedeutet insbesondere, dass in einer ruhenden Flüssigkeit keine Schubspannungen auftreten können.

Die Schubspannungen hängen von der zeitlichen Änderung $\dot{\gamma}$ des Winkels γ ab: $\tau = f(\dot{\gamma})$. Dabei gilt $f(0) = 0$. Bei manchen Flüssigkeiten stellt man im Experiment einen linearen Zusammenhang

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (1.1)$$

fest. Solche Flüssigkeiten nennt man *Newtonische Flüssigkeiten*. Die Größe η heißt *dynamische Viskosität* (*dynamische Zähigkeit*, *Scherzähigkeit*) und wird zum Beispiel in Ns/m^2 angegeben. Sie ist ein Materialparameter und hängt u.a. von der Temperatur der Flüssigkeit ab.

Wenn man den Schubversuch nach Abb. 1.1a mit einem elastischen Festkörper statt mit einer Flüssigkeit durchführt, dann stellt sich ein zeitunabhängiger Winkel γ ein. Dabei gilt anstelle von (1.1) das Hookesche Gesetz (Band 2, Gl. (3.10)) $\tau = G\gamma$.

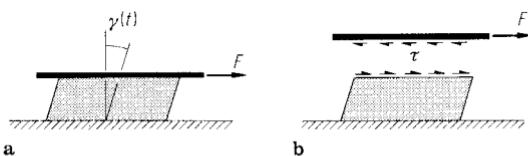


Abb. 1.1

In vielen Fällen ist es zulässig, die bei der Bewegung einer Flüssigkeit auftretenden Schubspannungen zu vernachlässigen. Dies stellt eine Idealisierung der wirklichen Vorgänge dar und vereinfacht die Behandlung von praktischen Problemen beträchtlich. Man spricht dann von einer *reibungsfreien Flüssigkeit*. Dagegen nennt man eine Flüssigkeit, bei der die Schubspannungen berücksichtigt werden, eine *zähe (viskose) Flüssigkeit*.

Flüssigkeiten erfahren selbst unter hohem Druck nur eine sehr geringe Volumenänderung. Man kann sie daher bei fast allen praktisch wichtigen Vorgängen als *inkompressibel* betrachten. Dann ist die Dichte vom Druck unabhängig; sie kann aber bei inhomogenen Flüssigkeiten vom Ort und von der Zeit abhängen. Für homogene, inkompressive Flüssigkeiten ist die Dichte ϱ räumlich und zeitlich konstant:

$$\varrho = \text{const} . \quad (1.2)$$

Eine reibungsfreie Flüssigkeit mit konstanter Dichte nennt man *ideale Flüssigkeit*. Wir wollen im folgenden immer voraussetzen, dass (1.2) gilt.

Wie bereits erwähnt, setzen auch Gase einer scherenden Beanspruchung nur sehr geringen Widerstand entgegen. Im Gegensatz zu Flüssigkeiten besitzen Gase aber keine freie Oberfläche. Sie füllen jeden ihnen zur Verfügung stehenden Raum – gegebenenfalls unter Änderung ihrer Dichte – vollständig aus. Die Dichte hängt dabei stark vom Druck und von der Temperatur ab. Die Erfahrung zeigt allerdings, dass die Dichteänderung in Sonderfällen auch bei Gasen gering sein kann und dann vernachlässigbar ist. Dies gilt zum Beispiel, wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Gases klein gegen die Schallgeschwindigkeit im Gas ist und wenn keine großen Druck- und Temperaturunterschiede vorhanden sind. Dann kann man auch bei einem Gas die Dichte als konstant ansehen und das Gas wie eine Flüssigkeit behandeln. Strömungsvorgänge, die mit großen Volumen- bzw. Dichteänderungen verbunden sind, werden in der *Gasdynamik* untersucht. Das Unterscheidungsmerkmal zwischen Flüssigkeiten und Gasen wird durch den Begriff *tropfbar* char-

rakterisiert. Als Oberbegriff für beide Aggregatzustände hat sich die Bezeichnung *Fluid* eingebürgert: tropfbare Fluide sind Flüssigkeiten, nicht tropfbare Fluide sind Gase.

1.2 Hydrostatik

1.2

Die *Hydrostatik* ist die Lehre vom Verhalten ruhender Flüssigkeiten. Von besonderem Interesse sind hierbei die Verteilung des Drucks in einer Flüssigkeit sowie die Kräfte, die von einer Flüssigkeit auf in ihr schwimmende Körper oder auf sie begrenzende Flächen ausgeübt werden. Zu deren Ermittlung verwenden wir das Schnittrinzip (Band 1, Abschn. 1.4) sowie die Gleichgewichtsbedingungen. Beide gelten nicht nur bei festen, sondern auch bei flüssigen Stoffen.

Da die Schubspannungen in beliebigen ruhenden Flüssigkeiten Null sind, gelten die folgenden Überlegungen gleichermaßen für reibungsfreie und für zähe Flüssigkeiten.

1.2.1 Druck in einer ruhenden Flüssigkeit

Nach Abschnitt 1.1 treten in einer ruhenden Flüssigkeit nur Normalspannungen auf. Bei Vorgängen von technischer Bedeutung sind dies Druckspannungen. Sie können nach dem Schnittrinzip veranschaulicht und einer Berechnung zugänglich gemacht werden.

Wir wollen im folgenden zeigen, dass die Druckspannungen in einem beliebigen Punkt der Flüssigkeit unabhängig von der Orientierung des Schnittes sind. Dazu denken wir uns dort einen kleinen Keil der Dicke Δz aus der Flüssigkeit geschnitten; er ist in Abb. 1.2 in der Seitenansicht dargestellt. Der Winkel α ist dabei beliebig gewählt. Die auf die Schnittflächen wirkenden Spannungen sind im Bild als Druckspannungen eingezeichnet und mit p , p_x und p_y bezeichnet. Außerdem wird das Element durch eine Volumenkraft \mathbf{f} mit den Komponenten f_x , f_y und f_z belastet.

Das Kräftegleichgewicht in x - und in y -Richtung liefert

$$\rightarrow : p_x \Delta y \Delta z - p \Delta s \Delta z \cos \alpha + f_x \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z = 0,$$

$$\uparrow : p_y \Delta x \Delta z - p \Delta s \Delta z \sin \alpha + f_y \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z = 0.$$

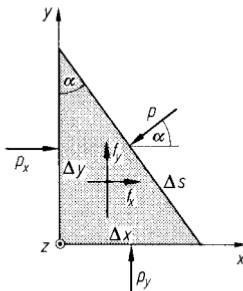


Abb. 1.2

Mit $\Delta x = \Delta s \sin \alpha$ und $\Delta y = \Delta s \cos \alpha$ folgt daraus

$$p_x = p - f_x \Delta x / 2, \quad p_y = p - f_y \Delta y / 2.$$

Wir lassen nun das Volumen des Keils gegen Null gehen. Mit $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$ erhalten wir dann

$$p_x = p_y = p.$$

Mit Hilfe eines Tetraeders (vgl. Abschnitt 2.1.1) lässt sich zeigen, dass insgesamt gilt:

$$p_x = p_y = p_z = p. \quad (1.3)$$

Die Druckspannung p nennt man kurz den *Druck*. Nach (1.3) ist in einer ruhenden Flüssigkeit der Druck in einem Punkt in allen Richtungen gleich. Diese Erkenntnis geht auf den Mathematiker und Physiker Blaise Pascal (1623–1662) zurück. Somit hängt der Druck nur vom Ort ab: $p = p(x, y, z)$. Er hat die Dimension Kraft/Fläche und wird in der nach Pascal benannten Einheit $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ oder in der Einheit $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ angegeben ($1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$).

Da in einer ruhenden Flüssigkeit keine Schubspannungen auftreten und die Normalspannungen nach (1.3) gleich groß sind, ist der Spannungstensor durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

gegeben (vgl. Abschnitt 2.1.4). Ein solcher Spannungszustand heisst **hydrostatischer Spannungszustand**.

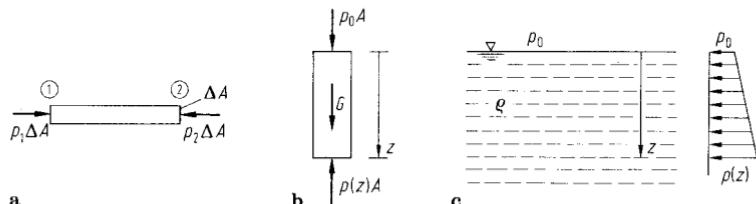


Abb. 1.3

Eine Flüssigkeit, auf die als einzige Volumenkraft die Schwerkraft wirkt, nennt man *schwere Flüssigkeit*. Um die Druckverteilung in einer schweren Flüssigkeit zu bestimmen, schneiden wir zunächst einen Zylinder (Querschnittsfläche ΔA) mit horizontaler Achse (Abb. 1.3a) aus der Flüssigkeit (die vertikalen Kräfte sind im Freikörperbild nicht eingezeichnet). Aus der Gleichgewichtsbedingung $p_1\Delta A - p_2\Delta A = 0$ folgt, dass an den Stellen ① und ② in gleicher Tiefe der gleiche Druck herrscht. Der Druck kann daher nur von der Tiefe abhängen. Um diese Abhängigkeit zu ermitteln, betrachten wir eine vertikale Flüssigkeitssäule (Querschnittsfläche A) nach Abb. 1.3b (hier sind die horizontalen Kräfte nicht eingezeichnet). Die Oberseite der Säule befindet sich an der Oberfläche der Flüssigkeit. Dort herrscht der Luftdruck p_0 . An der Unterseite, d.h. in der Tiefe z , gilt $p = p(z)$. Mit dem Gewicht $G = \varrho g A z$ der Säule folgt somit aus dem Kräftegleichgewicht

$$\uparrow: p(z)A - G - p_0A = 0 \rightarrow p(z) = p_0 + \varrho g z . \quad (1.5)$$

In einer schweren Flüssigkeit wächst demnach der Druck linear mit der Tiefe (Abb. 1.3c).

Die Gleichung (1.5) kann auch dann zur Bestimmung der Druckverteilung verwendet werden, wenn mehrere Flüssigkeiten mit verschiedenen Dichten in horizontalen Schichten angeordnet sind. So herrscht zum Beispiel in der Trennfläche zwischen den beiden in Abb. 1.4 dargestellten Flüssigkeiten mit den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 der Druck $p_1 = p_0 + \varrho_1 g h$, und in der Tiefe z unterhalb der Trennfläche lautet der Druck $p(z) = p_1 + \varrho_2 g z$.

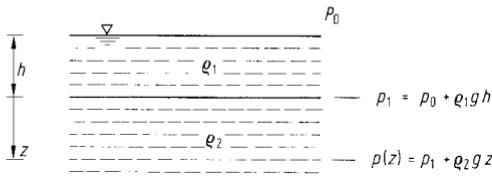


Abb. 1.4

Nach (1.5) ist der Druck in einer schweren Flüssigkeit an allen Stellen gleicher Tiefe gleich groß. Somit ist der Druck am Boden eines Gefäßes unabhängig von der Gefäßform. Wenn die Bodenflächen A verschiedener Gefäße gleich groß sind (Abb. 1.5), dann wird – unabhängig vom jeweiligen Gesamtgewicht der Flüssigkeit – jeweils die gleiche Kraft F von der Flüssigkeit auf den Boden ausgeübt. Dies nennt man das *Pascalsche* oder *hydrostatische Paradoxon*.

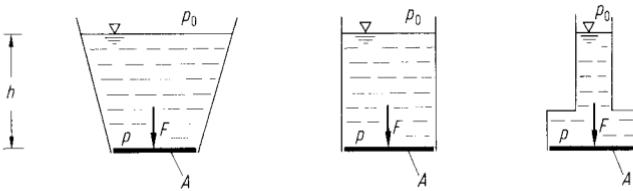


Abb. 1.5

In den *kommunizierenden Röhren* nach Abb. 1.6a ist der Druck an den Flüssigkeitsspiegeln gleich dem Umgebungsdruck p_0 . Daher stehen die Flüssigkeitsspiegel in den beiden Schenkeln des Rohres gleich hoch. Wenn die beiden Schenkel dagegen zum Beispiel an Druckbehälter angeschlossen sind und unterschiedliche Drücke p_1 und p_2 und den Flüssigkeitsspiegeln herrschen, dann stellt sich ein Höhenunterschied Δh ein (Abb. 1.6b). Da der Druck im rechten Schenkel in der Höhe des linken Flüssigkeitsspiegels ebenfalls gleich p_1 ist, gilt nach (1.5) die Beziehung

$$p_1 = p_2 + \varrho g \Delta h. \quad (1.6)$$

Danach kann zum Beispiel bei bekanntem Druck p_2 der Druck p_1 durch Messen des Höhenunterschiedes Δh bestimmt werden. Dies wird bei *Flüssigkeitsmanometern* angewendet.

Mit einem *Barometer* misst man den Druck in der Erdatmosphäre. Wenn der eine Schenkel abgeschlossen und die Luft oberhalb der Flüssigkeit entfernt worden ist (Abb. 1.6c), dann stellt sich nach (1.6) unter der Wirkung des Luftdrucks p_0 ein Höhenunterschied

$$\Delta h = \frac{p_0}{\varrho g}$$

ein. Der Druck p_0 , der bei Verwendung von Quecksilber mit der Dichte $\varrho = 13,594 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ beim Normwert $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ der Erdbeschleunigung zu einer Höhendifferenz von $\Delta h = 760 \text{ mm}$ führt, wird Normalluftdruck genannt. Er ergibt sich zu $p_0 = 1,0132 \text{ bar} = 1013,2 \text{ mbar} = 1013,2 \text{ hPa}$ (Hektopascal).

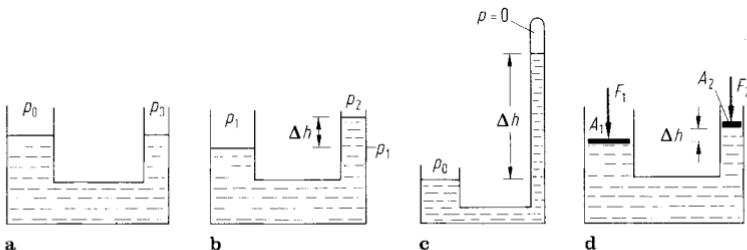


Abb. 1.6

In Wasser ($\varrho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) herrscht nach (1.5) in einer Tiefe von $z = 10 \text{ m}$ der Druck $p = p_0 + 0,980665 \text{ bar} \approx 2p_0$. Er ist somit ungefähr doppelt so groß wie der Luftdruck.

Bei einer *hydraulischen Presse* (Abb. 1.6d) wirken die Kräfte F_1 und F_2 auf die in die Schenkel eingepassten Kolben mit den Flächen A_1 und A_2 . Diese Kräfte erzeugen die Drücke p_1 und p_2 an den Kolben. Bei praktischen Anwendungen ist meist $\varrho g \Delta h \ll p_1, p_2$, so dass aus (1.6) näherungsweise

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

folgt. Wählt man zum Beispiel $A_1 \gg A_2$, so gilt $F_1 \gg F_2$, d.h., man braucht nur eine sehr kleine Kraft F_2 , um F_1 das Gleichgewicht zu halten.

Wir betrachten nun eine Flüssigkeit, auf die eine beliebige Volumenkraft \mathbf{f} wirkt. Zwischen der Volumenkraft \mathbf{f} und dem Druck p besteht ein Zusammenhang. Um ihn herzuleiten, denken wir uns den in Abb. 1.7 in der Seitenansicht dargestellten infinitesimalen Quader (Kantenlängen dx, dy, dz) aus der Flüssigkeit herausgeschnitten. Da der Druck vom Ort abhängt, ist er auf gegenüberliegenden Flächen i.a. nicht gleich groß. So wirkt auf der linken Schnittfläche der Druck p und auf der rechten Fläche der infinitesimal geänderte Druck $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$.

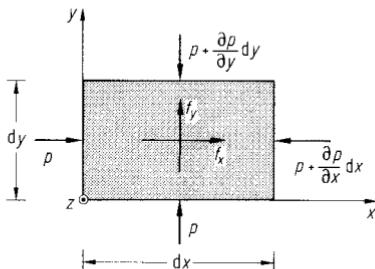


Abb. 1.7

Das Kräftegleichgewicht in x -Richtung liefert

$$p dy dz + f_x dx dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = f_x .$$

Wenn wir entsprechend auch das Kräftegleichgewicht in y - und in z -Richtung bilden, so erhalten wir insgesamt den gesuchten Zusammenhang

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z . \quad (1.7)$$

Mit Hilfe des Gradientenvektors (Band 3, Abschn. 1.2.7) kann (1.7) auch in der vektoriellen Form

$$\text{grad } p = \mathbf{f} \quad (1.8)$$

geschrieben werden. Die Punkte, in denen der gleiche Druck $p = \text{const}$ herrscht, bilden Flächen, die man *Niveauplatten* nennt.

Ein konservatives Kraftfeld ist aus einem Potential (potentielle Energie) E_p herleitbar: $\mathbf{f} = -\text{grad } E_p$. Da \mathbf{f} eine Volumenkraft ist, stellt E_p eine potentielle Energie pro Volumeneinheit dar. Durch Vergleich mit (1.8) erhält man einen Zusammenhang zwischen der potentiellen Energie der Volumenkraft und der Druckverteilung in der Flüssigkeit:

$$p(x, y, z) = -E_p(x, y, z) + C. \quad (1.9)$$

Dabei ist C eine beliebig wählbare Konstante. Demnach sind die Flächen gleichen Drucks (Niveaumassen) identisch mit den Flächen gleichen Potentials (*Äquipotentialflächen*). Da der Gradientenvektor (1.8) normal zur Niveaumasse steht, ist diese (bzw. die Äquipotentialfläche) in einem Punkt orthogonal zur Richtung der dort wirkenden Volumenkraft. Bei einer schweren Flüssigkeit stellen diese Flächen horizontale Ebenen dar.

Beispiel 1.1 Ein offenes U-Rohr enthält zwei sich nicht mischende Flüssigkeiten mit verschiedenen Dichten (Abb. 1.8a). Gegeben sind p_0 , ϱ_1 , h_2 und Δh . Man bestimme ϱ_2 .

B1.1

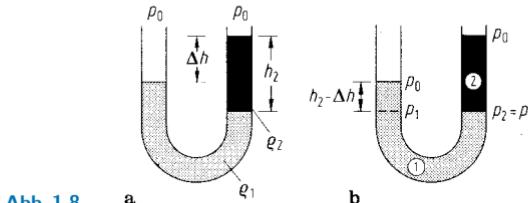


Abb. 1.8 a

b

Lösung In der Flüssigkeit ② ist der Druck an der Trennfläche nach (1.5) durch $p_2 = p_0 + \varrho_2 g h_2$ gegeben. Der Druck in der Flüssigkeit ① an der Trennfläche stimmt mit dem im linken Schenkel auf gleicher Höhe herrschenden Druck $p_1 = p_0 + \varrho_1 g(h_2 - \Delta h)$ überein (Abb. 1.8b). Gleichsetzen der Drücke liefert

$$p_1 = p_2 \rightarrow \underline{\underline{\varrho_2 = (1 - \Delta h/h_2) \varrho_1}}.$$

Beispiel 1.2 Ein Behälter mit Flüssigkeit (Dichte ϱ) rotiert als Ganzes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste,

B1.2

vertikale Achse (Abb. 1.9a).

Gesucht sind die Druckverteilung in der Flüssigkeit und die Form der freien Oberfläche.

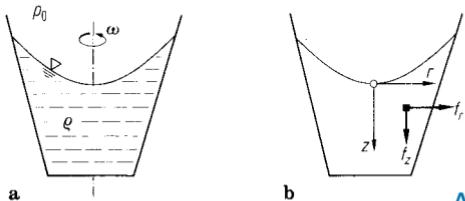


Abb. 1.9

Lösung Wir führen die Aufgabe auf ein statisches Problem zurück und bestimmen die Druckverteilung aus den Volumenkräften nach (1.7). In radialer Richtung wirkt die d'Alembertsche Trägheitskraft $f_r = \varrho r \omega^2$ (Band 3, Abschn. 4.1), in vertikaler Richtung wirkt die Gewichtskraft $f_z = \varrho g$ (Abb. 1.9b). Aus

$$\frac{\partial p}{\partial r} = f_r \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

folgt durch Integration

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \varrho \omega^2 r^2 + \varphi(z) \quad \text{bzw.} \quad p(r, z) = \varrho g z + \psi(r).$$

Dabei sind $\varphi(z)$ bzw. $\psi(r)$ zunächst unbekannte Funktionen von z bzw. r . Durch Vergleich der beiden Ausdrücke für p erkennt man, dass

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \varrho \omega^2 r^2 + \varrho g z + C$$

gilt, wobei C eine Konstante ist. Da bei dem gewählten Koordinatensystem (Abb. 1.9b) an der Stelle $r = 0, z = 0$ der Druck gleich dem Luftdruck p_0 sein muss, folgt $C = p_0$. Die Druckverteilung in der Flüssigkeit ergibt sich damit zu

$$\underline{p(r, z) = p_0 + \frac{1}{2} \varrho \omega^2 r^2 + \varrho g z.} \quad (a)$$

In vertikaler Richtung nimmt hiernach der Druck wie in einer nichtrotierenden Flüssigkeit linear mit der Tiefe zu, in horizontaler Richtung steigt er mit dem Quadrat der Entfernung von der Drehachse.

An der freien Oberfläche gilt $p = p_0$. Damit erhält man aus (a)

die Gleichung der Oberfläche:

$$z = -\frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Die freie Oberfläche ist somit ein Rotationsparaboloid.

1.2.2 Auftrieb

Wenn man einen an eine Federwaage gehängten Körper in eine ruhende Flüssigkeit eintaucht, stellt man an der Waage eine scheinbare Gewichtsverminderung fest. Sie entsteht dadurch, dass von der Flüssigkeit flächenhaft verteilte Kräfte auf den Körper ausgeübt werden, deren Resultierende vertikal nach oben gerichtet ist. Diese resultierende Kraft nennt man *Auftrieb*.

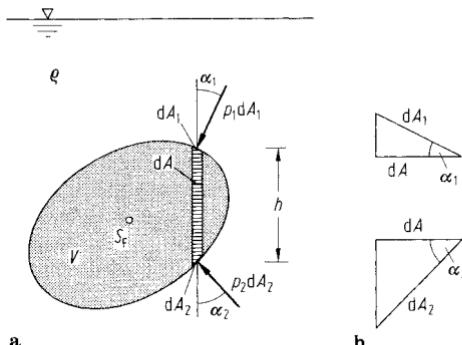


Abb. 1.10

a

b

Um den Auftrieb zu bestimmen, betrachten wir einen beliebig geformten Körper mit dem Volumen V , der zunächst vollständig eingetaucht sein soll. Wir denken uns den Körper aus vertikalen Elementarzylin dern aufgebaut. Ein solcher Zylinder mit der Querschnittsfläche dA und der Höhe h ist in Abb. 1.10a dargestellt. Auf seine schräge Oberseite dA_1 bzw. Unterseite dA_2 wirken die Kräfte $p_1 dA_1$ bzw. $p_2 dA_2$. Mit den Winkeln α_1 und α_2 gilt nach Abb. 1.10b der Zusammenhang $dA = dA_1 \cos \alpha_1 = dA_2 \cos \alpha_2$. Damit erhalten wir die Vertikalkomponente der resultierenden Kraft der Flüssigkeit auf den Elementarzyylinder (positiv nach

oben gezählt) zu

$$dF_A = p_2 dA_2 \cos \alpha_2 - p_1 dA_1 \cos \alpha_1 \rightarrow dF_A = (p_2 - p_1) dA.$$

Nach der hydrostatischen Druckgleichung (1.5) gilt $p_2 - p_1 = \varrho g h$, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist. Mit dem Volumen $dV = h dA$ des Zylinders ergibt sich daher

$$dF_A = \varrho g dV.$$

Die gesamte resultierende Kraft nach oben – d.h. der Auftrieb – folgt durch Integration über den Körper:

$$F_A = \int_V \varrho g dV.$$

Da ϱ und g konstant sind, erhält man daraus mit $\int_V dV = V$ schließlich

$$F_A = \varrho g V. \quad (1.10)$$

Der Auftrieb ist somit gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Dieser Zusammenhang wurde bereits von Archimedes (287–212) gefunden und wird daher *Archimedisches Prinzip* genannt. Die Wirkungslinie des Auftriebs geht wie die Wirkungslinie der Gewichtskraft durch den Schwerpunkt S_F der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Um zu zeigen, dass die Horizontalkomponente der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kraft Null ist, denken wir uns den Körper aus horizontalen Elementazylinern aufgebaut. Die Endflächen eines Zylinders mit beliebiger Orientierung befinden sich jeweils in gleicher Tiefe. Daher herrscht dort jeweils der gleiche Druck, und die in Richtung der Zylinderachse wirkenden Kraftkomponenten sind im Gleichgewicht. Somit ist auch die resultierende Kraft in beliebiger horizontaler Richtung Null.

Der Auftrieb kann auch auf anschauliche Weise bestimmt werden. Dazu denkt man sich den Körper aus der Flüssigkeit entfernt und den von ihm vorher eingenommenen Raum (Volumen

V , Oberfläche O) mit der Flüssigkeit selbst ausgefüllt. Da die Flüssigkeit in Ruhe ist, müssen die an der Oberfläche O angreifenden Flächenkräfte mit der Gewichtskraft $G = \varrho g V$, deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt geht, im Gleichgewicht sein. Die Resultierende aus den Flächenkräften – d.h. der Auftrieb – ist demnach dem Betrag nach gleich dem Gewicht der Flüssigkeitsmenge, geht durch deren Schwerpunkt S_F und ist nach oben gerichtet. Da die an der Oberfläche O wirkenden Flächenkräfte nicht davon abhängen, welches Material sich im Innern von O befindet, gilt diese Aussage auch für einen eingetauchten Körper.

Wenn der Körper nicht vollständig, sondern nur teilweise eingetaucht ist, dann ist der Auftrieb ebenfalls gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge und geht durch deren Schwerpunkt.

Beispiel 1.3 Eine unten offene, zylindrische Taucherglocke (Querschnittsfläche A , Höhe h , Gewicht G) wird über ein Seil in einen See langsam nach unten gelassen (Abb. 1.11a). Dabei ändern sich Druck und Volumen der Luft in der Glocke nach dem Gesetz $pV = \text{const}$.

In welcher Tiefe t ist das Volumen der Luft auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes abgesunken? Wie groß ist dann die Seilkraft?

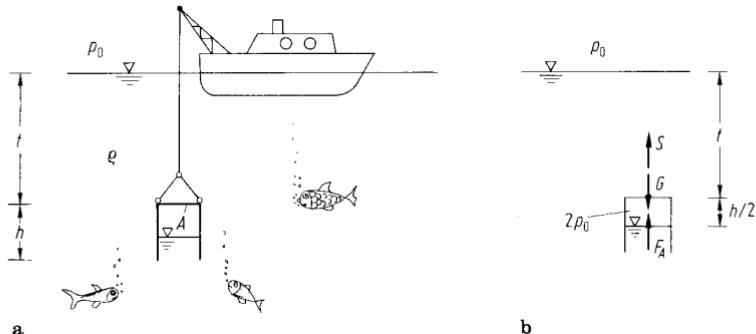


Abb. 1.11

Lösung Wenn das Luftvolumen auf die Hälfte abgesunken ist, dann hat sich wegen $pV = \text{const}$ der Druck verdoppelt, und die

Taucherglocke hat sich bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt (Abb. 1.11b). Die Trennfläche zwischen der Luft und dem Wasser befindet sich in der Tiefe $t + h/2$. Somit gilt

$$p_0 + \varrho g (t + h/2) = 2p_0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{p_0}{\varrho g} - \frac{h}{2}.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\uparrow: \quad S - G + F_A = 0$$

folgt mit der Auftriebskraft $F_A = \varrho g A h/2$ die Seilkraft zu

$$\underline{\underline{S = G - \varrho g A h/2.}}$$

B1.4

Beispiel 1.4 Ein Träger ruht nach Abb. 1.12a auf zwei gleichen Schwimmern (Grundfläche A). Um welchen Winkel ist der Träger geneigt, wenn eine Last (Gewicht G) im Abstand a vom linken Ufer aufgebracht wird?

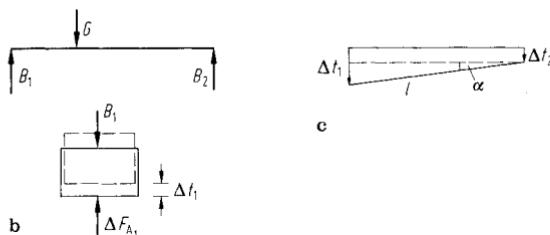
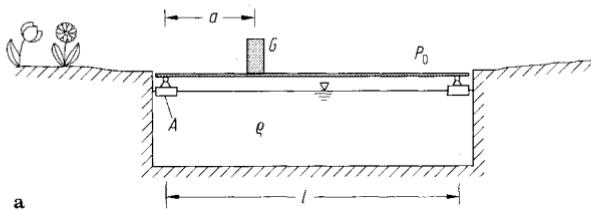


Abb. 1.12

Lösung Wenn die Last aufgebracht wird, sinken die Schwimmer im Vergleich zur unbelasteten Ausgangslage tiefer ein. Wir betrachten im folgenden nur diese zusätzlichen Eintauchtiefen sowie die

entsprechenden Kräfte.

Wir denken uns den Träger von den Schwimmern getrennt. Die auf die Teilkörper wirkenden Kräfte sind im Freikörperbild Abb. 1.12b dargestellt. Aus den Gleichgewichtsbedingungen am Träger sowie an den Schwimmern folgt:

$$\textcirclearrowleft B_2 : B_1 l - G(l - a) = 0 \rightarrow B_1 = \frac{l - a}{l} G,$$

$$\textcirclearrowleft B_1 : B_2 l - Ga = 0 \rightarrow B_2 = \frac{a}{l} G,$$

$$\uparrow : \Delta F_{A_1} = B_1, \Delta F_{A_2} = B_2.$$

Außerdem gilt nach der Archimedischen Auftriebsformel (1.10):

$$\Delta F_{A_1} = \varrho g A \Delta t_1, \Delta F_{A_2} = \varrho g A \Delta t_2.$$

Auflösen liefert die zusätzlichen Eintauchtiefen

$$\Delta t_1 = \frac{(l - a)G}{\varrho g A l}, \Delta t_2 = \frac{aG}{\varrho g A l}.$$

Daraus folgt der Neigungswinkel α (Abb. 1.12c):

$$\sin \alpha = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{l} \rightarrow \underline{\underline{\sin \alpha = \frac{(l - 2a)G}{\varrho g A l^2}}}.$$

Beispiel 1.5 Ein homogener Stab (Länge l , Querschnittsfläche A , Dichte ϱ_S) ist an seinem Ende in B drehbar gelagert (Abb. 1.13a) und taucht mit dem anderen Ende in eine Flüssigkeit (Dichte $\varrho_F > \varrho_S$).

Gesucht sind die Eintauchlänge x und der Neigungswinkel α .

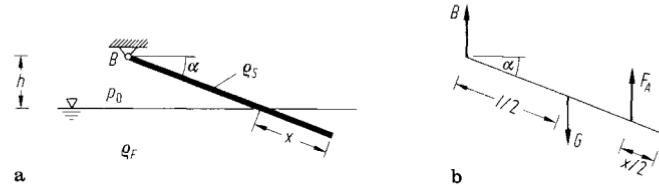


Abb. 1.13 a

Lösung Auf den eingetauchten Stab wirken das Gewicht $G = \varrho_S g A l$, der Auftrieb $F_A = \varrho_F g A x$ und die Lagerreaktion B

(Abb. 1.13b). Aus dem Momentengleichgewicht

$$\text{B: } G \frac{l}{2} \cos \alpha - F_A \left(l - \frac{x}{2} \right) \cos \alpha = 0$$

ergibt sich eine quadratische Gleichung für die Eintauchlänge:

$$\varrho_S l^2 - \varrho_F x (2l - x) = 0 \rightarrow x = l \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho_S}{\varrho_F}} \right]. \quad (\text{a})$$

Das positive Vorzeichen vor der Wurzel ist wegen $x < l$ auszuschließen. Der Neigungswinkel folgt aus der Geometrie:

$$\sin \alpha = \frac{h}{l - x} \rightarrow \sin \alpha = \frac{h}{l \sqrt{1 - \varrho_S / \varrho_F}}. \quad (\text{b})$$

Im Fall $h = l \sqrt{1 - \varrho_S / \varrho_F}$ nimmt der Stab eine vertikale Lage ein ($\sin \alpha = 1$). Für $h > l \sqrt{1 - \varrho_S / \varrho_F}$ gilt ebenfalls $\alpha = \pi/2$ (die Gleichungen (a) und (b) gelten dann nicht mehr).

1.2.3 Der schwimmende Körper

Wir betrachten einen teilweise in eine Flüssigkeit eingetauchten, symmetrischen Körper mit dem Gewicht G , der in Abb. 1.14a im Schnitt dargestellt ist. Die von der x, y -Ebene aus dem Körper geschnittene Fläche A heißt Schwimmfläche. Damit der Körper in der dargestellten Lage schwimmen kann, müssen sowohl das Kräftegleichgewicht als auch das Momentengleichgewicht erfüllt

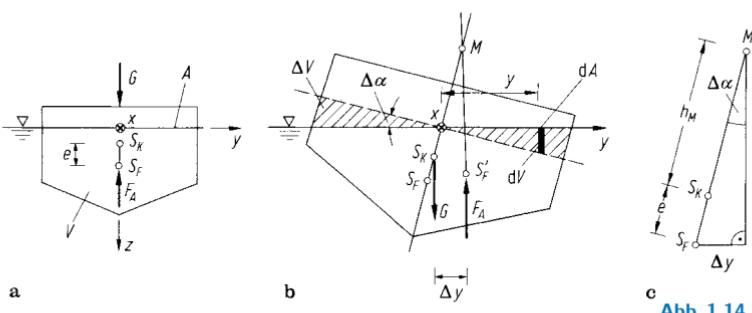


Abb. 1.14

sein. Das Kräftegleichgewicht lautet

$$G - F_A = 0. \quad (1.11)$$

Der Körper taucht daher so tief ein, bis das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gleich seinem eigenen Gewicht ist. Wegen der vorausgesetzten Symmetrie liegen der Schwerpunkt S_K des Körpers und der Schwerpunkt S_F der verdrängten Flüssigkeitsmenge auf der z -Achse. Somit fallen die Wirkungslinien der beiden Kräfte G und F_A zusammen, und das Momentengleichgewicht ist erfüllt.

Um die Stabilität der Gleichgewichtslage in Bezug auf eine Drehung um die x -Achse zu untersuchen, betrachten wir eine um einen kleinen Winkel $\Delta\alpha$ gedrehte benachbarte Lage (Abb. 1.14b). Wenn wir mit dA ein Flächenelement in der Schwimmfläche mit dem Abstand y von der Drehachse bezeichnen, dann ist die Änderung ΔV des Volumens V der verdrängten Flüssigkeit durch

$$\Delta V = \int y \Delta\alpha dA = \Delta\alpha \int y dA$$

gegeben. Dabei ist die Integration über die gesamte Schwimmfläche zu erstrecken. Da die x -Achse eine Schwerachse der Schwimmfläche ist, gilt $\Delta V = 0$. Somit ändert sich bei einer kleinen Drehung der Betrag der Auftriebskraft nicht. Dagegen verschiebt sich deren Wirkungslinie, da sich die Lage des Schwerpunkts der verdrängten Flüssigkeitsmenge ändert: der Punkt S_F geht in den Punkt S'_F über. Dann bilden G und F_A ein Kräftepaar mit dem Moment

$$\Delta M = \Delta y F_A. \quad (1.12)$$

Dieses Moment wird durch die verteilten Kräfte in den schraffierten Bereichen erzeugt:

$$\Delta M = \int y \varrho g dV.$$

Mit dem Volumenelement $dV = y \Delta\alpha dA$ und dem Flächenträgheitsmoment $I_x = \int y^2 dA$ folgt

$$\Delta M = \varrho g I_x \Delta\alpha.$$

Durch Vergleichen mit (1.12) erhält man daraus

$$\Delta y F_A = \varrho g I_x \Delta \alpha. \quad (1.13)$$

Da zwischen dem Hebelarm Δy und dem Drehwinkel $\Delta \alpha$ nach Abb. 1.14c der Zusammenhang

$$\Delta y = (e + h_M) \Delta \alpha$$

besteht, ergibt sich mit $F_A = \varrho g V$ aus (1.13)

$$h_M = \frac{I_x}{V} - e. \quad (1.14)$$

Der Schnittpunkt der Wirkungslinie von F_A mit der Geraden durch die Punkte S_F und S_K heisst *Metazentrum M*. Seine Lage wird durch die Höhe h_M bestimmt. Wenn das Metazentrum oberhalb von S_K liegt ($h_M > 0$), dann bildet ΔM ein Rückstellmoment, und die Gleichgewichtslage nach Abb. 1.14a ist stabil. Befindet sich M dagegen unterhalb von S_K ($h_M < 0$), dann ist die Gleichgewichtslage instabil.

Als einfaches Beispiel betrachten wir ein in einer Flüssigkeit (Dichte ϱ_F) schwimmendes, homogenes Brett (Länge l , Breite b , Höhe h , Dichte ϱ_B), das die Eintauchtiefe t hat (Abb. 1.15). Mit dem Gewicht $G = \varrho_B g l b h$ des Bretts und dem Auftrieb $F_A = \varrho_F g l b t$ folgt nach (1.11)

$$\frac{t}{h} = \frac{\varrho_B}{\varrho_F}.$$

Da $t < h$ sein muss, kann das Brett somit nur dann schwimmen, wenn seine Dichte kleiner als die Dichte der Flüssigkeit ist. Mit

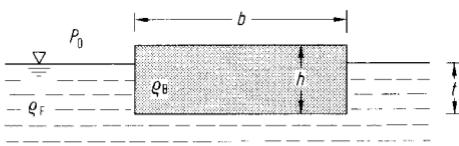


Abb. 1.15

$I_x = l b^3 / 12$, $V = l b t$ und $e = (h - t) / 2$ erhält man aus (1.14)

$$h_M = \frac{b^2}{12t} - \frac{1}{2}(h - t).$$

An der Stabilitätsgrenze $h_M = 0$ folgt daraus

$$b^2 = 6t(h - t).$$

Bei vorgegebenen Werten von h und t ist die Gleichgewichtslage stabil für $b^2 > 6t(h - t)$ und instabil für $b^2 < 6t(h - t)$. Hieraus folgt zum Beispiel für $t = h/2$ die Bedingung $b > \sqrt{3/2}h$ für eine stabile Gleichgewichtslage.

1.2.4 Druckkräfte auf ebene Flächen

Für viele praktische Anwendungen ist es erforderlich, die Kräfte zu bestimmen, die durch den hydrostatischen Druck auf Berandungen (Behälterwände, Staumauern, usw.) bzw. auf Teilstücken der Berandung (Lukendeckel, Klappen, Schieber) hervorgerufen werden. Wir beschränken uns dabei zunächst auf ebene Flächen.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine nach Abb. 1.16a um den Winkel α geneigte, ebene Teilfläche A , die sich vollständig unterhalb des Flüssigkeitsspiegels befindet. Für die resultierende Druckkraft F gilt

$$F = \int_A p \, dA. \quad (1.15)$$

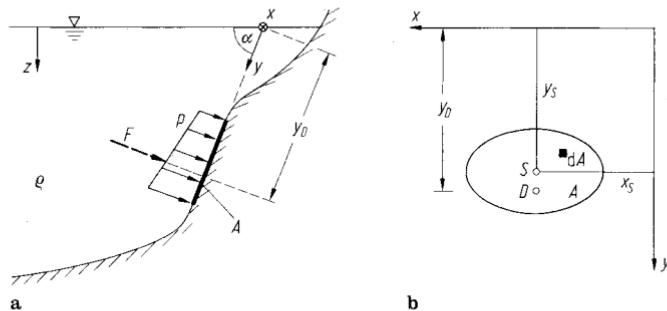


Abb. 1.16

Wir wollen zunächst nur die von der Flüssigkeit allein erzeugte Kraft ermitteln, d.h., den vom Luftdruck p_0 herührenden Anteil nicht berücksichtigen. Dann gilt in der Tiefe z für den Druck $p = \varrho g z$. Wenn wir ein x, y -Koordinatensystem gemäß Abb. 1.16a, b einführen, dann lässt sich dieser mit $z = y \sin \alpha$ in der Form $p = \varrho g y \sin \alpha$ schreiben. Einsetzen in (1.15) liefert

$$F = \varrho g \sin \alpha \int_A y \, dA. \quad (1.16)$$

Mit $\int_A y \, dA = y_S A$ (Band 1, Gl. (4.11)) sowie $y_S \sin \alpha = z_S$ folgt daraus $F = \varrho g z_S A$, und wegen $p_S = \varrho g z_S$ ergibt sich schließlich

$$F = p_S A. \quad (1.17)$$

Die resultierende Kraft ist demnach gleich dem Produkt aus dem Druck im Flächenschwerpunkt und der Fläche.

Die Wirkungslinie von F folgt aus der Bedingung, dass das Moment dieser Kraft bezüglich jeder beliebigen Achse gleich dem entsprechenden resultierenden Moment der Flächenlast p sein muss. Wenn wir die x -Achse als Bezugsachse wählen und den Abstand der Wirkungslinie von der x -Achse mit y_D bezeichnen (Abb. 1.16), dann erhalten wir

$$F y_D = \int_A y p \, dA = \varrho g \sin \alpha \int_A y^2 \, dA.$$

Einsetzen von F nach (1.16) liefert

$$y_D = \frac{\int y^2 \, dA}{\int y \, dA}.$$

Führen wir das Flächenträgheitsmoment $I_x = \int_A y^2 \, dA$ und das statische Moment $S_x = \int_A y \, dA$ ein, so ergibt sich daraus

$$y_D = \frac{I_x}{S_x}. \quad (1.18)$$

Aus der Momentenbeziehung um die y -Achse $Fx_D = \int_A x p \, dA$ finden wir entsprechend den Abstand x_D der Wirkungslinie von der y -Achse zu

$$x_D = -\frac{I_{xy}}{S_x}. \quad (1.19)$$

Dabei ist $I_{xy} = -\int_A xy \, dA$ das Deviationsmoment. Der Punkt D auf der Fläche mit den Koordinaten x_D und y_D heisst **Druckmittelpunkt**. Wenn die y -Achse eine Symmetriearchse der Fläche darstellt, dann ist $I_{xy} = 0$, d.h., der Druckmittelpunkt liegt auf der Symmetriearchse.

Nach dem Satz von Steiner (Band 2, Abschn. 4.2.2) gilt

$$I_x = I_{x_S} + y_S^2 A,$$

wobei I_{x_S} das Flächenmoment bezüglich einer zur x -Achse parallelen Achse durch den Schwerpunkt S der Fläche ist. Damit folgt aus (1.18)

$$y_D = \frac{I_{x_S} + y_S^2 A}{y_S A} = y_S + \frac{I_{x_S}}{y_S A}. \quad (1.20)$$

Da I_{x_S} , y_S und A positiv sind, gilt $y_D > y_S$. Der Druckmittelpunkt D liegt somit tiefer als der Schwerpunkt S .

Wenn man den Luftdruck p_0 berücksichtigt, dann ergibt sich die resultierende Kraft weiterhin aus (1.17). Für p_S muss in diesem Fall der Druck $p_S = p_0 + \varrho g z_S$ eingesetzt werden. Die Wirkungslinie geht durch den Kräftemittelpunkt der von der Flüssigkeit allein erzeugten Kraft und der vom Luftdruck herrührenden Kraft $p_0 A$. Die Wirkungslinie von $p_0 A$ geht dabei durch den Schwerpunkt S der Fläche A .

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir eine rechteckige Fläche (Höhe a , Breite b), deren Oberkante nach Abb. 1.17a horizontal verläuft. Mit dem Druck $p_S = \varrho g z_S = \varrho g \sin \alpha (c + a/2)$ und der Fläche $A = ab$ erhält man aus (1.17) die resultierende Kraft der Flüssigkeit auf die Fläche zu

$$F = \frac{1}{2} \varrho g \sin \alpha (2c + a) ab. \quad (1.21)$$

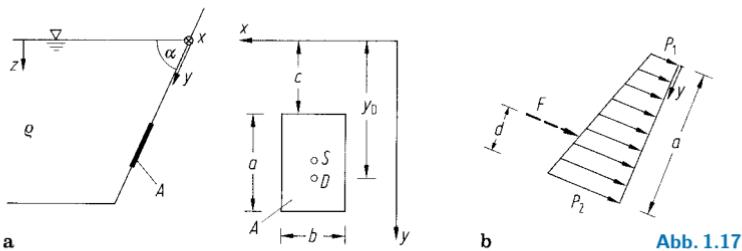


Abb. 1.17

Die Flächenmomente sind durch

$$I_x = \frac{b a^3}{12} + \left(c + \frac{a}{2}\right)^2 a b, \quad S_x = \left(c + \frac{a}{2}\right) a b$$

gegeben. Damit folgt nach (1.18) die y -Koordinate des Druckmittelpunkts zu

$$y_D = \frac{a^2 + 3(2c + a)^2}{6(2c + a)}. \quad (1.22)$$

Die resultierende Kraft und die Lage ihrer Wirkungslinie können auch durch die Drücke p_1 und p_2 an der Ober- und der Unterkante des Rechtecks ausgedrückt werden. Die Kraft F ist das Produkt aus der Trapezfläche, welche den Druckverlauf charakterisiert, und der Breite b (Abb. 1.17b):

$$F = \frac{p_1 + p_2}{2} a b. \quad (1.23)$$

Der Abstand d der Wirkungslinie von der unteren Kante ist durch den entsprechenden Schwerpunktabstand der Trapezfläche (vgl. Band 1, Abschnitt 4.3, Tabelle 4.1) gegeben:

$$d = \frac{a}{3} \frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2}. \quad (1.24)$$

B1.6

Beispiel 1.6 Man bestimme die resultierende Kraft und ihre Wirkungslinie auf eine kreisförmige Luke (Radius r) in einer vertikalen Wand eines oben offenen Behälters (Abb. 1.18a).

Lösung Da der Atmosphärendruck sowohl von innen (über die Flüssigkeit) als auch von außen auf das Fenster wirkt, braucht

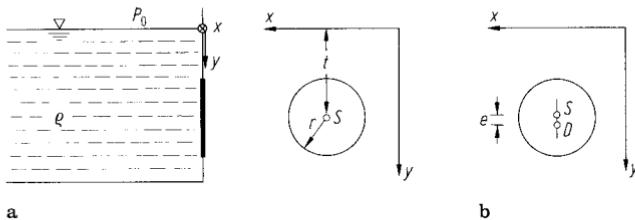


Abb. 1.18

er nicht berücksichtigt zu werden. Mit dem Druck $p_S = \varrho g t$ im Schwerpunkt und der Kreisfläche $A = \pi r^2$ erhalten wir nach (1.17)

$$\underline{\underline{F = \pi \varrho g t r^2}}.$$

Das Flächenträgheitsmoment und das statische Moment bezüglich der x -Achse sind durch

$$\underline{\underline{I_x = \frac{\pi r^4}{4} + \pi r^2 t^2}}, \quad \underline{\underline{S_x = y_S A = \pi t r^2}}$$

gegeben. Damit folgt aus (1.18)

$$\underline{\underline{y_D = \frac{I_x}{S_x} = t + \frac{r^2}{4t}}}.$$

Der Druckmittelpunkt D liegt somit um $e = r^2/(4t)$ tiefer als der Schwerpunkt S (Abb. 1.18b).

Beispiel 1.7 In einem oben offenen Behälter der Länge b wird durch eine homogene, starre Platte (Gewicht G) eine Flüssigkeit (Dichte ϱ) auf zwei unterschiedliche Spiegelhöhen eingestellt (Abb. 1.19a). Die Platte ist längs ihrer Unterkante A gelenkig gelagert (abgedichtetes Scharniergegen) und wird an der Oberkante durch ein horizontales Seil im Gleichgewicht gehalten.

Man bestimme die Lagerreaktionen im Scharniergegen und die Seilkraft.

Lösung Wir schneiden die Platte frei. Die auf sie wirkenden Kräfte sind im Freikörperbild Abb. 1.19b dargestellt. Der Atmosphärendruck p_0 wirkt auf beiden Seiten der Platte und braucht daher

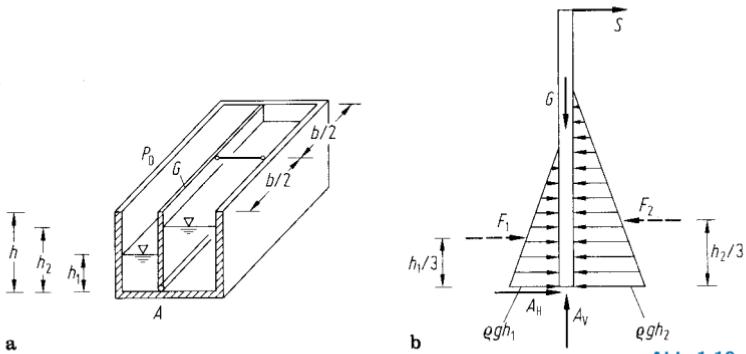


Abb. 1.19

nicht berücksichtigt zu werden. Die Drücke fasst man zweckmäßigerverweise zu ihren Resultierenden $F_1 = \varrho g \frac{h_1}{2}(h_1 b)$ bzw. $F_2 = \varrho g \frac{h_2}{2}(h_2 b)$ mit den Abständen $h_1/3$ bzw. $h_2/3$ vom Scharniergelenk zusammen. Dann liefern die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}
 \text{A} : \quad & F_1 \frac{h_1}{3} - F_2 \frac{h_2}{3} + Sh = 0 \quad \rightarrow \quad S = \frac{\varrho g b}{6h} (h_2^3 - h_1^3), \\
 \uparrow : \quad & A_V - G = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_V = G}}, \\
 \rightarrow : \quad & F_1 - F_2 + A_H + S = 0 \\
 & \rightarrow \quad A_H = \frac{\varrho g b}{6h} [3h(h_2^2 - h_1^2) - (h_2^3 - h_1^3)]. \quad \underline{\underline{A_H}}
 \end{aligned}$$

Die Kräfte A_H und A_V sind über die Länge des Scharniers verteilt.

B1.8

Beispiel 1.8 In Abb. 1.20a ist eine Vorrichtung zur Regelung des Wasserstands im Behälter ① skizziert. Sie besteht aus einer in C drehbar gelagerten quadratischen Platte BC , die über den Hebel CD und ein Seil (Länge l) mit einem zylindrischen Schwimmer (Grundfläche A , Gewicht G) verbunden ist. Die Gewichte von Klappe, Hebel und Seil werden vernachlässigt.

Bei welchem Wasserstand $h = h_1$ ist das Seil gerade gespannt? Für welches $h = h_2$ öffnet sich die Klappe?

Lösung Wir bezeichnen die Eintauchtiefe des Schwimmers mit t (Abb. 1.20b). Das Seil ist dann gerade gespannt, wenn die geo-

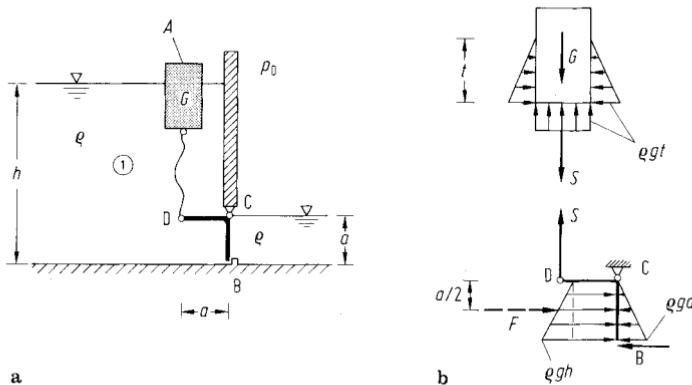


Abb. 1.20

metrische Beziehung

$$h = a + l + t \quad (\text{a})$$

erfüllt und die Seilkraft dabei Null ist. Bei verschwindender Seilkraft muss nach (1.11) die Gewichtskraft G mit der Auftriebskraft $F_A = \rho g A t$ im Gleichgewicht sein:

$$G - F_A = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{G}{\rho q A}. \quad (b)$$

Einsetzen von (b) in (a) liefert den Wasserstand

$$h_1 = a + l + \frac{G}{\varrho g A}. \quad (c)$$

Die auf den Schwimmer und auf die Klappe wirkenden Kräfte sind in Abb. 1.20b dargestellt. Die resultierende Druckkraft auf die Klappe ergibt sich aus der gleichförmigen Druckverteilung $\varrho g(h - a)$ unter Beachtung der Tatsache, dass sich die linearen Anteile aufheben:

$$F = \rho q(h - a) a^2.$$

Die Klappe öffnet sich, wenn die Lagerkraft B Null wird. Das Kräftegleichgewicht am Schwimmer und das Momentengleichgewicht bezüglich C liefern dann

$$\downarrow : \quad G + S - \rho q A t = 0,$$

$$\textcircled{C}: Sa - \varrho g(h-a)a^2 \frac{a}{2} = 0.$$

Daraus folgt mit der auch hier geltenden geometrischen Beziehung (a) der zum Öffnen der Klappe erforderliche Wasserstand

$$h_2 = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{2A}} \left[\frac{G}{\varrho g A} + a + l - \frac{a^3}{2A} \right]. \quad (\text{d})$$

Bei der Herleitung von (d) wurde vorausgesetzt, dass die Ein-tauchtiefe t des Schwimmers kleiner als seine Höhe ist.

1.2.5 Druckkräfte auf gekrümmte Flächen

Wir wollen nun die resultierende Kraft einer Flüssigkeit auf die gekrümmte Fläche A nach Abb. 1.21a ermitteln. Dabei ist es zweckmäßig, die Kraftkomponenten in vertikaler und in horizontaler Richtung getrennt zu bestimmen. Die auf ein Flächenelement dA wirkenden Komponenten der Kraft $dF = p dA$ sind unter Beachtung von $p = \varrho g z$ und $d\bar{A} = dA \cos \alpha$ bzw. $dA^* = dA \sin \alpha$ durch

$$dF_V = p dA \cos \alpha = \varrho g z d\bar{A} = \varrho g dV,$$

$$dF_H = p dA \sin \alpha = p dA^*$$

gegeben. Durch Integration erhält man daraus

$$F_V = \varrho g \int dV \quad \rightarrow \quad F_V = \varrho g V, \quad (1.25a)$$

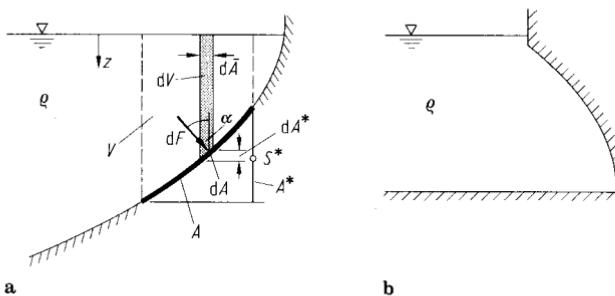


Abb. 1.21

$$F_H = \int p \, dA^* = \varrho g \int z \, dA^* = \varrho g z_{S^*} A^* \rightarrow F_H = p_{S^*} A^*. \quad (1.25b)$$

Die Vertikalkomponente F_V ist demnach gleich dem Gewicht der Flüssigkeit oberhalb der Fläche A . Ihre Wirkungslinie geht durch den Schwerpunkt des Flüssigkeitsvolumens V . Die Horizontalkomponente F_H ist das Produkt aus der projizierten Fläche A^* und dem Druck p_{S^*} im Schwerpunkt S^* dieser Fläche. Sie stimmt mit der Kraft überein, die von der Flüssigkeit auf die vertikale ebene Fläche A^* ausgeübt wird. Ihre Wirkungslinie kann daher nach Abschnitt 1.2.4 bestimmt werden. Die Gleichungen (1.25a) gelten sinngemäß auch dann, wenn sich eine Flüssigkeit unterhalb einer gekrümmten Fläche befindet (Abb. 1.21b).

In einem Anwendungsbeispiel bestimmen wir die resultierende Kraft, die vom Wasser im kreisförmigen Bereich BC auf eine Staumauer (Länge l) ausgeübt wird (Abb. 1.22a). Die Druckverteilung in der projizierten Ebene ist in Abb. 1.22b dargestellt. Mit $V = \pi r^2 l/4$, $p_{S^*} = \varrho g r/2$ und $A^* = r l$ erhält man aus (1.25a) die Kraftkomponenten zu

$$F_V = \frac{\pi}{4} \varrho g r^2 l, \quad F_H = \frac{1}{2} \varrho g r^2 l.$$

Die Wirkungslinie der Vertikalkomponente geht durch den Schwerpunkt der über CB liegenden Viertelkreisfläche (Abb. 1.22c). Sie hat den Abstand $c_S = 4r/3\pi$ (Band 1, Abschnitt 4.3, Tabelle 4.1) vom Punkt C . Die Wirkungslinie der Horizontalkomponente verläuft in der Tiefe $2r/3$ (Abb. 1.22b).

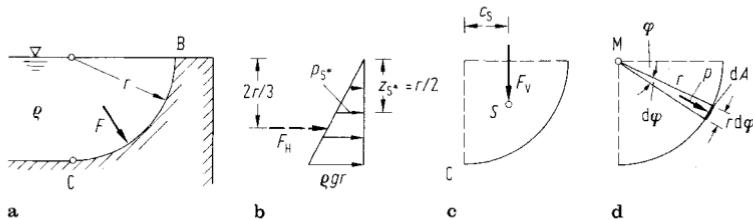


Abb. 1.22

Die resultierende Kraft kann auch durch Integration ermittelt werden (Abb. 1.22d). Auf ein Flächenelement $dA = r d\varphi l$ wirkt die Kraft $dF = p dA$. Mit $p = \rho g r \sin \varphi$, $dF_V = p dA \sin \varphi$ und $dF_H = p dA \cos \varphi$ erhält man

$$F_V = \rho g r^2 l \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \quad \rightarrow \quad F_V = \frac{\pi}{4} \rho g r^2 l,$$

$$F_H = \rho g r^2 l \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \quad \rightarrow \quad F_H = \frac{1}{2} \rho g r^2 l.$$

Da die Druckkräfte auf allen Flächenelementen orthogonal zur Staumauer wirken und demnach durch den Mittelpunkt M des Kreises gehen, bilden sie ein zentrales Kräftesystem. Somit muss auch die Wirkungslinie der Resultierenden durch den Punkt M gehen.

B1.9

Beispiel 1.9 Der Querschnitt des nach Abb. 1.23a unter dem Wasserspiegel liegenden zylindrischen Wehrs AB (Breite b , Gewicht G) hat die Form eines Viertelkreises (Radius r). Das Wehr ist bei A gelenkig gelagert und liegt bei B auf.

Gesucht sind die Lagerreaktionen in A und B .

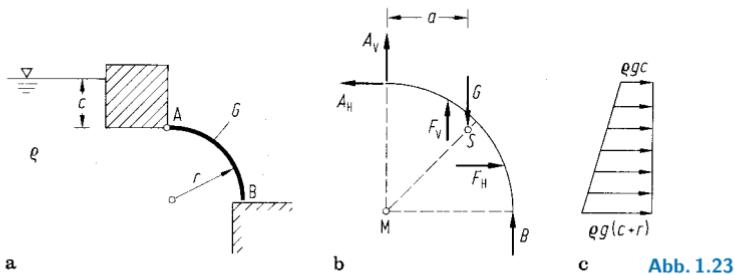


Abb. 1.23

Lösung Die auf das Wehr wirkenden Kräfte sind im Freikörperbild dargestellt (Abb. 1.23b). Abbildung 1.23c zeigt die Druckverteilung in der projizierten Ebene. Nach (1.25a) erhält man die Komponenten der resultierenden Kraft F der Flüssigkeit auf das Wehr zu

$$F_V = \rho g b \left[(c + r) r - \frac{\pi}{4} r^2 \right] = \rho g b r \left(c + r - \frac{\pi}{4} r \right),$$

$$F_H = p_{S^*} A^* = \frac{1}{2} [\rho g c + \rho g (c + r)] b r = \frac{1}{2} \rho g b r (2c + r).$$

Die Wirkungslinie der aus F_H und F_V resultierenden Kraft F geht durch den Kreismittelpunkt M . Daher lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\textcirclearrowleft M: -A_H r + Ga - Br = 0,$$

$$\rightarrow: -A_H + F_H = 0,$$

$$\uparrow: A_V - G + F_V + B = 0.$$

Mit $a = 2r/\pi$ (Band 1, Abschnitt 4.4) folgen daraus die Lagerreaktionen

$$\underline{\underline{A_H = \frac{1}{2}\varrho g b r(2c + r)}},$$

$$\underline{\underline{A_V = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)G + \frac{1}{4}(\pi - 2)\varrho g b r^2}},$$

$$\underline{\underline{B = \frac{2}{\pi}G - \frac{1}{2}\varrho g b r(2c + r)}}.$$

Das Wehr ist nur für $B > 0$ geschlossen.

Beispiel 1.10 Ein zylindrisches Wehr (Länge l , Gewicht G) taucht nach Abb. 1.24a in eine Flüssigkeit ① (Dichte ϱ_1) ein. Es verhindert, dass sich eine Flüssigkeit ② (Schichtdicke r), deren Spiegel um $r/2$ oberhalb von A liegt, nach rechts ausbreitet.

Man bestimme die Dichte ϱ_2 der Flüssigkeit ②. Wie groß sind die Lagerreaktionen in A ?

Lösung In der Trennfläche zwischen den beiden Flüssigkeiten gilt

$$p_1 = p_2 \rightarrow \varrho_1 g r/2 = \varrho_2 g r \rightarrow \underline{\underline{\varrho_2 = \varrho_1/2}}.$$

Damit sich die vorgegebene Schichtung einstellt, muss demnach die Dichte der Flüssigkeit ② halb so groß wie die Dichte der Flüssigkeit ① sein.

Abbildung 1.24b zeigt die Druckverteilungen in den projizierten Ebenen. Aus dem Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung folgt:

B1.10

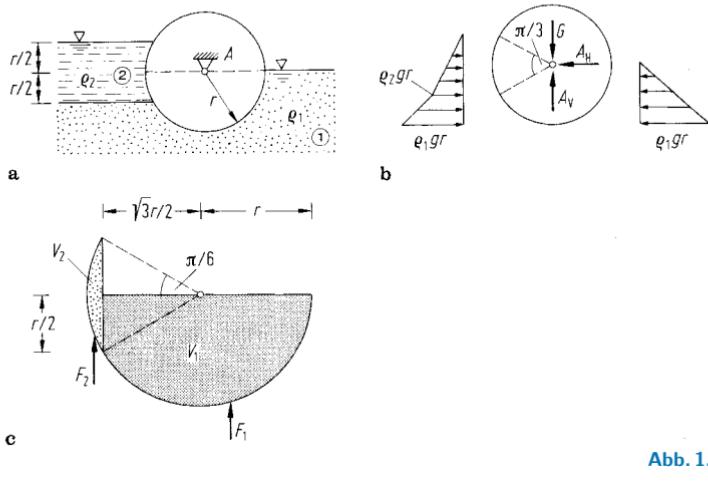


Abb. 1.24

$$\rightarrow : \frac{1}{2} \varrho_2 g r^2 l + \frac{1}{2} (\varrho_2 g r + \varrho_1 g r) \frac{r}{2} l - \frac{1}{2} \varrho_1 g r^2 l - A_H = 0$$

$$\rightarrow \underline{\underline{A_H = \frac{1}{8} \varrho_1 g r^2 l.}}$$

Die Vertikalkomponente der resultierenden Kraft auf das Wehr setzt sich gemäß Abb. 1.24c aus zwei Anteilen zusammen. Mit den Volumina

$$V_2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 l, \quad V_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 l - \frac{1}{2} V_2 = \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) r^2 l$$

erhält man

$$F_1 = \varrho_1 g \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) r^2 l, \quad F_2 = \varrho_2 g \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 l.$$

Damit liefert das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung:

$$\uparrow: F_1 + F_2 - G + A_V = 0 \rightarrow \underline{\underline{A_V = G - \frac{\pi}{2} \varrho_1 g r^2 l.}}$$

1.3 Hydrodynamik

1.3.1 Kinematische Grundlagen

Die *Hydrodynamik* ist die Lehre von der Bewegung von Flüssigkeiten unter der Wirkung von Kräften. Bevor wir uns allerdings dem Einfluss von Kräften auf die Bewegung widmen, befassen wir uns mit der *Kinematik* von Strömungen.

Hierzu führen wir zunächst einige Begriffe ein. Wir denken uns ein beliebiges Volumen in der Flüssigkeit durch eine geschlossene Fläche abgegrenzt. Durch diese Fläche soll Flüssigkeit weder in das Volumen einströmen noch aus ihm ausströmen. Die Flüssigkeit innerhalb der Fläche heißt dann *abgeschlossene Flüssigkeitsmenge* oder *materielles Flüssigkeitsvolumen*. Ein materielles Flüssigkeitsvolumen mit infinitesimaler Ausdehnung nennt man ein *Flüssigkeitsteilchen*. Geht seine Ausdehnung gegen Null, so spricht man von einem *materiellen Punkt*.

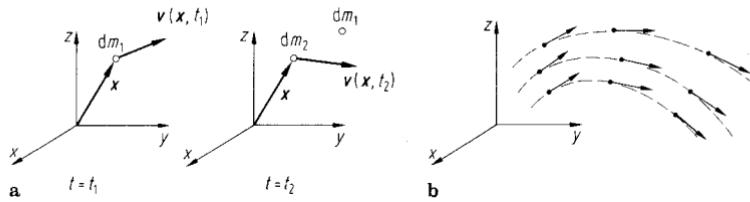


Abb. 1.25

Wir betrachten nun das Flüssigkeitsteilchen, das sich zur Zeit t am Ort \mathbf{x} befindet. Seine Geschwindigkeit bezeichnen wir mit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Da der Vektor \mathbf{x} einen beliebigen Ort in der Flüssigkeit kennzeichnet, gibt $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen an jedem Ort an. Man nennt $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ das *Geschwindigkeitsfeld*; es beschreibt die Bewegung der gesamten Flüssigkeit.

Abbildung 1.25a zeigt den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} an der Stelle \mathbf{x} zum Zeitpunkt $t = t_1$. Zu dieser Zeit befindet sich dort das Flüssigkeitsteilchen dm_1 . Zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_2$ befindet sich an der gleichen Stelle ein anderes Flüssigkeitsteilchen dm_2 . Außerdem hat sich im allgemeinen die Geschwindigkeit geändert. Das Geschwindigkeitsfeld beschreibt also nicht

den zeitlichen Verlauf der Bewegungen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen (der im allgemeinen ohnehin nicht interessiert), sondern es gibt an, welche Geschwindigkeit an jedem Ort zu jeder beliebigen Zeit vorliegt. Diese Betrachtungsweise, die typisch für die Beschreibung der Bewegung von Flüssigkeiten ist, geht auf Leonhard Euler (1707–1783) zurück.

Durch das Geschwindigkeitsfeld kann man jedem Raumpunkt \mathbf{x} eine Richtung, nämlich die Richtung $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, zuordnen. Man erhält somit zu jedem Zeitpunkt ein Richtungsfeld (Abb. 1.25b); dieses kann sich im allgemeinen mit der Zeit ändern. Kurven, deren Tangentenrichtung in jedem Punkt mit der Richtung von \mathbf{v} übereinstimmt, nennt man *Stromlinien*. Auch sie sind im allgemeinen zeitabhängig. Sie veranschaulichen in einfacher Weise das Gesamtbild der Strömung. Stromlinien können sich nicht schneiden und auch keinen Knick besitzen, da andernfalls an einer solchen Stelle zwei verschiedene Geschwindigkeiten existieren müssten. Außerdem kann kein Flüssigkeitstransport quer zu einer Stromlinie stattfinden.

Bei manchen Strömungen hängt die Geschwindigkeit \mathbf{v} nicht von der Zeit t , sondern nur vom Ort \mathbf{x} ab. Dann sind das durch $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ definierte Richtungsfeld und die Stromlinien zeitunabhängig. In diesem Fall nennt man die Strömung *stationär*. Andernfalls heißt sie *instationär*.

Wenn zum Beispiel eine Flüssigkeit einen in ihr ruhenden festen Körper mit zeitlich konstanter Geschwindigkeit umströmt (d.h., die Geschwindigkeit an einem beliebigen, festen Ort des Strömungsfeldes sich nicht ändert), dann liegt eine stationäre Strömung vor. Bewegt man dagegen den Körper mit konstanter Geschwindigkeit durch eine im ungestörten Zustand ruhende Flüssigkeit, so ändert sich die Geschwindigkeit in allen Raumpunkten mit der Zeit, und die Strömung ist instationär.

Von den Stromlinien müssen die *Bahnlinien* unterschieden werden. Dies sind die Kurven, die von den einzelnen Flüssigkeitsteilchen bei der Bewegung der Flüssigkeit durchlaufen werden. Bei stationären Strömungen fallen die Stromlinien und die Bahnlinien zusammen.

Dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} kann man ein anderes Vektorfeld gemäß

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (1.26)$$

zuordnen. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ heißt *Wirbelvektor*. Wenn $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ ist, dann nennt man die Strömung *wirbelbehaftet*. Ist dagegen in einem Bereich der Flüssigkeit $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, so heißt dort die Strömung *wirbelfrei*.

In den technischen Anwendungen treten neben der allgemeinen dreidimensionalen Strömung häufig einfachere Strömungsformen auf. Wenn sich zum Beispiel alle Flüssigkeitsteilchen in parallelen, festen Ebenen bewegen, so ist die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu diesen Ebenen Null. Man spricht dann von einer *ebenen Strömung*. Bei der Bewegung von Flüssigkeiten in Rohren oder Gerinnen hat die Geschwindigkeit der Teilchen im wesentlichen die Richtung der Rohr- oder Gerinneckse. Vernachlässigt man die senkrecht zur Achse auftretenden Geschwindigkeitskomponenten, so gelangt man zu einer eindimensionalen Darstellung. Eine auf dieser vereinfachenden, eindimensionalen Betrachtungsweise aufbauende Theorie nennt man *Hydraulik*.

Wir befassen uns im folgenden mit einer eindimensionalen Strömung, wie sie zum Beispiel in einem gekrümmten Rohr auftritt. Als Koordinate wählen wir die entlang der Achse gezählte Bogenlänge s . Dann hat das Geschwindigkeitsfeld nur die Komponente $v = v(s, t)$. Wir betrachten nun ein Flüssigkeitsteilchen, dessen Lage in Abhängigkeit von der Zeit durch $s(t)$ beschrieben wird. Seine Geschwindigkeit wird durch die Zeitableitung $v = ds/dt$ definiert. Die Änderung der Geschwindigkeit ist durch das totale Differential

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad (1.27)$$

gegeben. Die Beschleunigung $a(s, t)$ des Flüssigkeitsteilchens ist die zeitliche Änderung seiner Geschwindigkeit: $a = dv/dt$. Damit erhält man

$$a = \frac{\partial v}{\partial s} v + \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Man nennt $a = dv/dt$ die *materielle (substantielle)* Beschleunigung. Sie setzt sich additiv aus der *konvektiven* Beschleunigung $(\partial v/\partial s)v$ und der *lokalen* Beschleunigung $\partial v/\partial t$ zusammen. Die lokale Beschleunigung gibt die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit v an einem beliebigen (festen) Ort im Strömungsfeld an. Dagegen stellt die konvektive Beschleunigung die Änderung von v dar, die dadurch entsteht, dass sich das Teilchen zu einer Stelle mit anderer Geschwindigkeit weiterbewegt.

Bei einer *stationären* Strömung hängt das Geschwindigkeitsfeld nicht von der Zeit ab: $v = v(s)$. Dann ist wegen $\partial v/\partial t = 0$ die lokale Beschleunigung Null, und die materielle Beschleunigung vereinfacht sich zu

$$a = \frac{dv}{ds} v. \quad (1.29)$$

1.3.2 Stromfadentheorie

1.3.2.1 Allgemeines

Zur Beschreibung der Bewegung einer Flüssigkeit müssen neben kinematischen Größen auch Kraftgrößen – zum Beispiel der Druck – berücksichtigt werden. Außerdem benötigt man Bewegungsgleichungen sowie ein Stoffgesetz zur Beschreibung des Materialverhaltens der Flüssigkeit. Wir beschränken uns im folgenden auf ideale Flüssigkeiten.

Viele Strömungsvorgänge lassen sich exakt oder näherungsweise als eindimensionale Strömung beschreiben. Um zu einer solchen Darstellung zu gelangen, denken wir uns zunächst im Innern der Flüssigkeit eine geschlossene Kurve C gekennzeichnet (Abb. 1.26). Die Stromlinien durch alle Punkte dieser Kurve bilden eine *Stromröhre*; die darin enthaltene Flüssigkeit heißt *Stromfaden*. Wir neh-

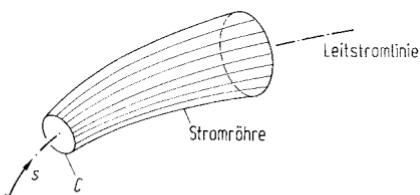


Abb. 1.26

men an, dass die Geschwindigkeit und der Druck als konstant über den Querschnitt der Stromröhre angesehen werden können, d.h., die Strömung in einer Stromröhre wird durch ihr Verhalten auf einer beliebigen Stromlinie, der *Leitstromlinie* charakterisiert. Bei einer stationären Strömung ist die Stromröhre zeitlich unveränderlich, und die Flüssigkeit in ihr bewegt sich wie in einem Rohr mit fester Wand, während sich bei einer instationären Strömung die Stromröhre mit der Zeit ändert. Das gesamte Strömungsgebiet kann man sich aus vielen Stromfädchen aufgebaut denken. Bei zahlreichen praktischen Anwendungen, zum Beispiel einer Rohrströmung, lässt sich das gesamte Strömungsgebiet als ein einziger Stromfaden auffassen.

Wir beschränken uns von nun an auf stationäre Strömungen. Dann hängen die Geschwindigkeit und der Druck nur von der Bogenlänge s entlang der Leitstromlinie ab:

$$v = v(s), \quad p = p(s). \quad (1.30)$$

Für die Beschleunigung gilt dann nach (1.29) $a = \frac{dv}{ds} v$. Eine auf diesen Vereinfachungen aufgebaute Theorie nennt man *Stromfadentheorie*.

1.3.2.2 Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten eine Stromröhre mit variabler Querschnittsfläche $A(s)$ gemäß Abb. 1.27. Die Querschnittsflächen an zwei beliebigen Stellen ① bzw. ② werden mit A_1 bzw. A_2 bezeichnet. An diesen Stellen haben die Flüssigkeitsteilchen die Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 . Durch die Querschnitte bei ① und ② wird ein Gebiet des Stromfadens abgegrenzt. In der Zeit dt fließt durch den

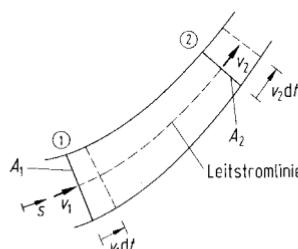


Abb. 1.27

Querschnitt A_1 eine Flüssigkeitsmenge mit der Masse $\varrho A_1 v_1 dt$ in dieses Gebiet ein. Durch den Querschnitt A_2 fließt in der gleichen Zeit die Masse $\varrho A_2 v_2 dt$ aus. Da die Dichte konstant ist, kann sich dabei die Masse der Flüssigkeit im Gebiet nicht ändern (Massenerhaltung). Somit muss die an der Stelle ② austretende Masse genau so groß sein wie die bei ① eintretende Masse (durch die Stromröhre selbst kann keine Flüssigkeit ein- oder austreten): $\varrho A_1 v_1 dt = \varrho A_2 v_2 dt$. Damit erhält man

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{bzw.} \quad A v = \text{const.} \quad (1.31)$$

Das Produkt

$$Q = A v \quad (1.32)$$

heißt *Volumenstrom* und stellt das pro Zeiteinheit durch einen festen Querschnitt strömende Volumen dar. Nach (1.31) ist der Volumenstrom an jeder Stelle s der Stromröhre gleich groß. Die Beziehung (1.31) nennt man *Kontinuitätsgleichung*.

1.3.2.3 Bernoullische Gleichung

In der Stromröhre nach Abb. 1.28a bewege sich eine Flüssigkeit. Zur Herleitung der Bewegungsgleichung schneiden wir aus dem Stromfaden längs der Leitstromlinie ein Element der Länge ds und der Querschnittsfläche dA heraus (Abb. 1.28b). An seiner linken Stirnfläche – an der Stelle s – herrscht der Druck p , an der Stelle $s + ds$ der Druck $p + dp$. Auf die Stirnflächen wirken somit die Druckkräfte $p dA$ bzw. $(p + dp)dA$. Das Gewicht des Massenelements ist durch $dm g$ gegeben. Die auf den Zylindermantel

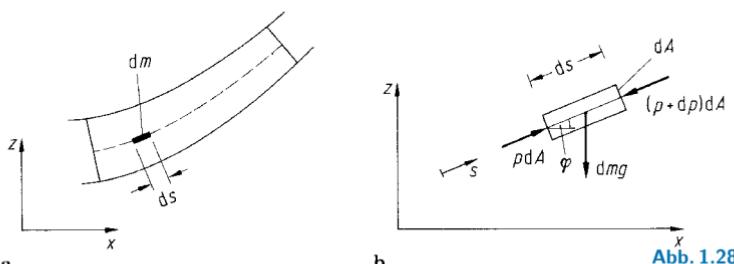


Abb. 1.28

wirkenden Flächenkräfte stehen senkrecht zur Zylinderachse (reibungsfreie Flüssigkeit!). Sie werden im folgenden nicht benötigt und sind daher in Abb. 1.28b nicht eingezeichnet.

Die Bewegungsgleichung in Richtung von s lautet

$$dm a = p dA - (p + dp) dA - dm g \sin \varphi. \quad (1.33)$$

Mit $\sin \varphi = dz/ds$ und $dm = \varrho dA ds$ erhält man hieraus

$$\varrho a + \frac{dp}{ds} + \varrho g \frac{dz}{ds} = 0. \quad (1.34)$$

Die Beschleunigung $a = (dv/ds) v$ des Massenelements lässt sich auch als $a = d(v^2/2)/ds$ schreiben. Damit wird aus (1.34)

$$\varrho \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{dp}{ds} + \varrho g \frac{dz}{ds} = 0. \quad (1.35)$$

Da diese Gleichung nur Ableitungen nach der Bogenlänge s enthält, kann man sie längs der Stromlinie integrieren und erhält die *Bernoullische Gleichung* (Daniel Bernoulli, 1700–1782)

$$\varrho \frac{v^2}{2} + p + \varrho g z = \text{const}. \quad (1.36)$$

Alle Terme in (1.36) haben die Dimension eines Drucks. Man bezeichnet p als *statischen Druck*, $\varrho v^2/2$ als *Staudruck (dynamischer Druck)* und $\varrho g z$ als *geodätischen Druck*. Nach (1.36) ist die Summe aus dem statischen Druck, dem Staudruck und dem geodätischen Druck längs einer Stromlinie konstant. Die Summe aus dem statischen Druck und dem Staudruck nennt man *Gesamtdruck*.

Die einzelnen Terme in der Bernoullischen Gleichung können auch in anderer Weise gedeutet werden. Die Ausdrücke $\varrho v^2/2$ bzw. $\varrho g z$ stellen die auf das Volumen bezogene kinetische bzw. potentielle Energie eines Flüssigkeitsteilchens dar. Daher lässt sich auch p als eine auf das Volumen bezogene Energie deuten. Man nennt p dann *Druckenergie* (vgl. auch Abschn. 1.2.1). Bei dieser Betrachtungsweise bezeichnet man (1.36) als *Energiegleichung der stationären Strömung*. Sie sagt aus, dass für eine ideale Flüssigkeit die „Strömungsenergie“ längs einer Stromlinie konstant ist.

Dividiert man (1.36) durch ϱg , so erhält man

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varrho g} + z = H = \text{const.} \quad (1.37)$$

Alle Terme haben nun die Dimension einer Höhe. Man nennt $v^2/2g$ die *Geschwindigkeitshöhe*, $p/\varrho g$ die *Druckhöhe*, z die *Ortshöhe* und H die *hydraulische Höhe*.

In einem Anwendungsbeispiel untersuchen wir den Ausfluss aus einem Gefäß mit einer im Vergleich zur Spiegelfläche A_s kleinen Öffnung A (Abb. 1.29a). Damit die Strömung stationär ist, wird der Flüssigkeitsspiegel durch einen Zufluss auf der konstanten Höhe h über der Öffnung gehalten. Wir fassen das Gefäß mit dem Ausfluss als Stromröhre auf und wählen eine Leitstromlinie vom Spiegel bis zum Ausfluss. Zählen wir z von der Ausflussöffnung, so liefert die Bernoulli'sche Gleichung für die Punkte ① und ②

$$\frac{1}{2} \varrho v_s^2 + p_0 + \varrho g h = \frac{1}{2} \varrho v^2 + p_0 + 0. \quad (1.38)$$

Wenn der Spiegel auf konstanter Höhe gehalten wird, gilt $v_s = 0$. Damit folgt

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1.39)$$

Diese Gleichung nennt man *Torriceillesche Ausflussformel*. Die Ausflussgeschwindigkeit v hängt demnach nur von der Höhe h des Spiegels über der Öffnung ab. Sie ist gleich der Geschwindigkeit eines Massenpunktes, der ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einer beliebigen, reibungsfreien Bahn die gleiche Höhe h durchläuft (Energiesatz).

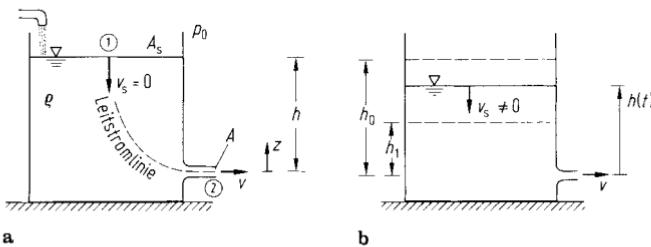


Abb. 1.29

Experimente zeigen, dass die Ausflussgeschwindigkeit in Wirklichkeit etwas kleiner ist als die mit der Torricellischen Formel berechnete Geschwindigkeit. Dies ist auf die in der Flüssigkeit wirkende Reibung zurückzuführen. Außerdem stellt man eine Einschnürung des austretenden Flüssigkeitsstrahls fest, wenn die Öffnung nicht hinreichend abgerundet ist. Beide Effekte können mit Hilfe von Korrekturtermen berücksichtigt werden.

Wenn das Gefäß keinen Zufluss hat, sinkt der Flüssigkeitsspiegel im Lauf der Zeit. Die Strömung ist dann instationär. Für $A/A_S \ll 1$ ist die Geschwindigkeit v_s , mit der sich der Spiegel absenkt, sehr klein im Vergleich zur Ausflussgeschwindigkeit v . In diesem Fall kann man die Strömung in guter Näherung immer noch als stationär betrachten und die Geschwindigkeit v nach (1.39) mit der augenblicklichen Höhe $h(t)$ berechnen: $v = \sqrt{2g}h(t)$. Damit lässt sich die Zeit Δt ermitteln, in welcher der Spiegel von einer Anfangshöhe h_0 auf eine Endhöhe h_1 absinkt (Abb. 1.29b). Dabei wird im Beispiel der Einfachheit halber angenommen, dass die Spiegelfläche A_S konstant ist. Die Geschwindigkeit v_s ist definiert als die zeitliche Änderung der Höhe h :

$$v_s = -\frac{dh}{dt} \quad \rightarrow \quad dh = -v_s dt.$$

Das negative Vorzeichen zeigt an, dass h und v_s entgegengesetzt gerichtet sind. Der Betrag von v_s folgt aus der Kontinuitätsgleichung:

$$A_S v_s = A v \quad \rightarrow \quad v_s = \frac{A}{A_S} v.$$

Unter Berücksichtigung von (1.39) erhält man somit

$$dh = -\frac{A}{A_S} v dt = -\frac{A}{A_S} \sqrt{2g} h dt.$$

Trennen der Veränderlichen und Integration liefern die gesuchte Zeit:

$$\begin{aligned} \sqrt{2g} \frac{A}{A_S} \int_0^{\Delta t} dt &= - \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{\sqrt{h}} \\ \rightarrow \quad \Delta t &= \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{A_S}{A} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Wir betrachten nun die Strömung in einem Rohr, das über Zuleitungen mit einem Manometer verbunden ist (Abb. 1.30a). Das Manometer misst die Differenz der Drücke p_l bzw. p_r auf der linken bzw. der rechten Seite. Da sich die Flüssigkeit in den Zuleitungen nicht bewegt, gilt nach der hydrostatischen Druckgleichung (1.5)

$$p_l = p_1 + \varrho g z_1, \quad p_r = p_2 + \varrho g z_2.$$

Mit der Bernoulli'schen Gleichung für eine Stromlinie von ① nach ② folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varrho v_1^2 + p_1 + \varrho g z_1 &= \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + p_2 + \varrho g z_2 \\ \rightarrow \quad p_l - p_r &= \frac{1}{2} \varrho v_2^2 - \frac{1}{2} \varrho v_1^2. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Das Manometer misst demnach die Differenz der Staudrücke $\varrho v_1^2/2$ und $\varrho v_2^2/2$ in der Strömung (nicht die Differenz der statischen Drücke p_1 und p_2).

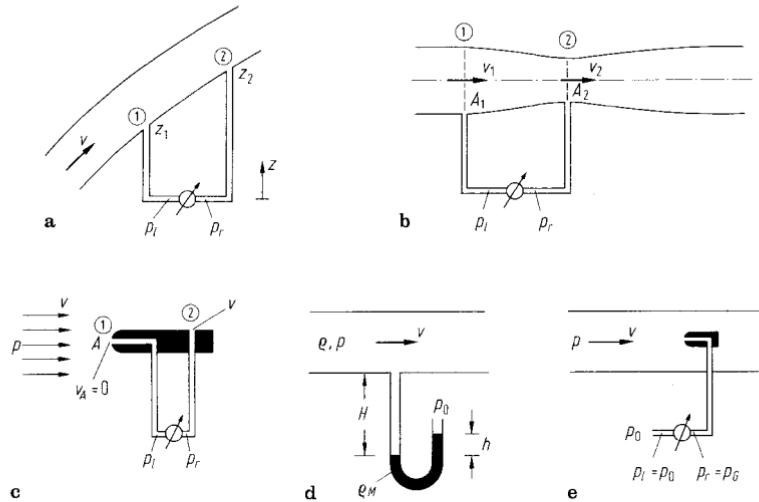


Abb. 1.30

Ein Rohr, dessen Querschnittsfläche sich in einem Bereich ① bis ② vom Wert A_1 auf den Wert A_2 verjüngt und sich anschließend

wieder auf den ursprünglichen Wert erweitert, nennt man *Venturirohr* (Abb. 1.30b). Da der Volumenstrom Q im Rohr konstant ist, gilt nach der Kontinuitätsgleichung

$$v_1 = Q/A_1, \quad v_2 = Q/A_2.$$

Einsetzen in (1.41) liefert

$$Q = \sqrt{\frac{2 A_1^2 A_2^2 (p_l - p_r)}{\varrho (A_1^2 - A_2^2)}}. \quad (1.42)$$

Bei gegebenen Querschnittsabmessungen kann man somit aus der im Manometer gemessenen Druckdifferenz den Volumenstrom im Rohr ermitteln.

Die Geschwindigkeit v einer Strömung kann mit einem *Prandtl-Rohr* (Abb. 1.30c) bestimmt werden. Beachtet man, dass die Geschwindigkeit im Punkt A Null ist, so erhält man aus (1.41)

$$p_l - p_r = \frac{1}{2} \varrho v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{\varrho} (p_l - p_r)}.$$

Den Punkt A nennt man *Staupunkt*. Aus der Bernoullischen Gleichung für die Stromlinie, die in A mündet (Staustromlinie), folgt mit $v_A = 0$ der Druck im Punkt A zu

$$p_A = p + \frac{1}{2} \varrho v^2.$$

Gegenüber dem ungestörten statischen Druck p wirkt demnach im Staupunkt ein erhöhter Druck. Der Druckanstieg ist gleich dem Staudruck $\varrho v^2/2$.

Die Messung des statischen Drucks p kann mit Hilfe eines U-Rohres (Abb. 1.30d) erfolgen, in dem sich eine Messflüssigkeit mit der Dichte ϱ_M befindet. Der freie Schenkel des Rohres ist oben offen. Nach (1.5) gilt dann

$$p + \varrho g H = p_0 + \varrho_M g h \rightarrow p = p_0 + \varrho_M g h - \varrho g H. \quad (1.43)$$

Wenn die Dichte ϱ_M der Messflüssigkeit sehr viel größer als die Dichte ϱ der strömenden Flüssigkeit ist, dann kann man – bei nicht zu großem H – den Term $\varrho g H$ in (1.43) vernachlässigen:

$$p = p_0 + \varrho_M g h .$$

Bei vielen technisch wichtigen Strömungsvorgängen gehen Druckunterschiede in verschiedenen Punkten einer Stromlinie im wesentlichen auf Geschwindigkeitsunterschiede und nicht auf Höhenunterschiede zurück. Vernachlässigen wir die Änderung des geodätischen Drucks in der Bernoullischen Gleichung, dann vereinfacht sie sich zu

$$\frac{1}{2} \varrho v^2 + p = \text{const} ,$$

d.h., der Gesamtdruck ist längs einer Stromlinie konstant. In einem Staupunkt A ist wegen $v_A = 0$ der statische Druck p_A gleich dem Gesamtdruck p_G auf der Staustromlinie:

$$p_A = p_G = \frac{1}{2} \varrho v^2 + p .$$

Daher kann man den Gesamtdruck mit einem *Staurohr* (*Pitotrohr*) nach Abb. 1.30e bestimmen. Bei Vernachlässigung des hydrostatischen Druckanstiegs im vertikalen Rohr kann man am Manometer die Differenz des Gesamtdrucks und des Luftdrucks p_0 ablesen.

B1.11 **Beispiel 1.11** Aus einem Speicher, dessen Spiegel durch einen Zufluss auf der konstanten Höhe H gehalten wird, fließt Wasser durch ein Rohr mit der Querschnittsfläche A_2 . An der Stelle ① wird der Querschnitt des Rohres mit einem Venturi-Einsatz auf A_1 reduziert (Abb. 1.31). Von dieser Stelle führt ein vertikales Rohr in einen Behälter ③, der ebenfalls Wasser enthält. Sowohl das Venturi-Rohr als auch der Ausfluss ② liegen auf der Höhe h .

Welcher Pegel h_B stellt sich im Behälter ein?

Lösung Die Austrittsgeschwindigkeit v_2 des Wassers an der Stelle ② ergibt sich nach (1.39) zu

$$v_2 = \sqrt{2 g (H - h)} .$$

Die Geschwindigkeit v_1 im eingeschnürten Querschnitt ① folgt aus der Kontinuitätsgleichung:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2 g (H - h)} .$$

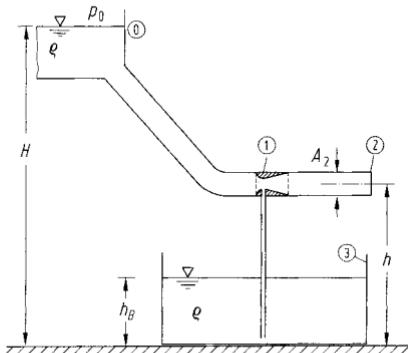


Abb. 1.31

Mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung für die Punkte ① und ② einer Stromlinie können wir nun den Druck p_1 im eingeschnürt Querschnitt bestimmen:

$$p_0 + \rho g H = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 + \rho g h$$

$$\rightarrow p_1 = p_0 - \rho g (H - h) \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (a)$$

Wegen $A_2 > A_1$ und $H > h$ ist der Druck p_1 kleiner als der Atmosphärendruck p_0 . Falls das Rohr an der Stelle ① ein Loch hätte, würde dort kein Wasser austreten, sondern Luft in das Rohr gesaugt werden. Auf dieser Saugwirkung beruht das Prinzip der Wasserstrahlpumpe.

Der Druck p_B am Boden des Behälters ③ kann nach der hydrostatischen Druckgleichung (1.5) einerseits durch

$$p_B = p_0 + \rho g h_B \quad (b)$$

und andererseits durch

$$p_B = p_1 + \rho g h \quad (c)$$

ausgedrückt werden. Durch Vergleich von (b) und (c) erhalten wir die gesuchte Spiegelhöhe

$$h_B = \frac{1}{\rho g} (p_1 - p_0) + h.$$

Einsetzen von (a) liefert schließlich

$$\underline{\underline{h_B = H - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 (H - h)}}.$$

Im Sonderfall $A_2/A_1 = \sqrt{H/(H-h)}$ wird $h_B = 0$. Dann ist nach (a) $p_1 = p_0 - \varrho g h$.

B1.12 **Beispiel 1.12** Aus einem Behälter (Abb. 1.32a) strömt Wasser rotationssymmetrisch und stationär durch einen Spalt der Höhe h ($h \ll H$).

Man bestimme die Geschwindigkeitsverteilung $v(r)$ und die Druckverteilung $p(r)$ im Bereich $r_i \leq r \leq r_a$. Welche resultierende Druckkraft F übt das Wasser in diesem Bereich auf die kreisringförmige Platte P aus?

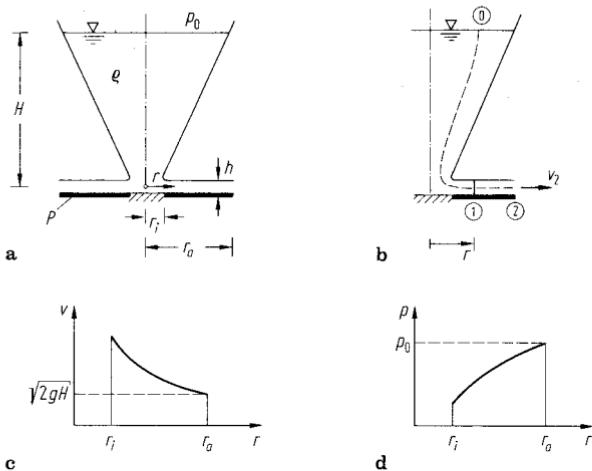


Abb. 1.32

Lösung Wir bestimmen zuerst die Ausflussgeschwindigkeit v_2 mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung für die Punkte ① und ② einer Stromlinie (Abb. 1.32b):

$$\varrho g H = \frac{1}{2} \varrho v_2^2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2 g H}.$$

Die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt folgt aus der Kontinuitätsgleichung. Mit der Querschnittsfläche $A(r) = 2\pi r h$ ergibt sich (Abb. 1.32c)

$$2\pi r h v(r) = 2\pi r_a h v_2 \quad \rightarrow \quad v(r) = \sqrt{2 g H} \frac{r_a}{r}.$$

Die Druckverteilung erhält man aus der Bernoullischen Glei-

chung für die Punkte ① und ② einer Stromlinie (Abb. 1.32d):

$$\frac{1}{2} \varrho v^2(r) + p(r) = p_0 + \varrho g H \rightarrow p(r) = p_0 - \varrho g H \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right).$$

Wegen $r \leq r_a$ gilt $p(r) \leq p_0$. Da der Druck nicht negativ sein kann (genauer: nicht kleiner als der Dampfdruck), sind die Ergebnisse nur für

$$p(r_i) > 0 \rightarrow \frac{r_a^2}{r_i^2} < 1 + \frac{p_0}{\varrho g H}$$

physikalisch sinnvoll.

Auf die Platte P wirkt von oben der Druck $p(r)$ und von unten der Atmosphärendruck p_0 . Somit ergibt sich wegen $p(r) \leq p_0$ eine nach oben gerichtete resultierende Kraft (die Strömung versucht, die Platte anzusaugen!). Mit $dA = 2\pi r dr$ erhält man

$$\begin{aligned} F &= \int [p_0 - p(r)] dA = 2\pi \varrho g H \int_{r_i}^{r_a} \left(\frac{r_a^2}{r} - r \right) dr \\ &= 2\pi \varrho g H \left[r_a^2 \ln \frac{r_a}{r_i} - \frac{1}{2} (r_a^2 - r_i^2) \right]. \end{aligned}$$

1.3.2.4 Impulssatz

Wenn man aus der Kontinuitätsgleichung und der Bernoullischen Gleichung die Druckverteilung in einer strömenden Flüssigkeit bestimmen kann, dann lassen sich daraus die Kräfte berechnen, die von der Flüssigkeit auf die Berandungen ausgeübt werden. In vielen Fällen ist die Ermittlung der Druckverteilung auf diesem Weg jedoch nicht möglich. Dann verwendet man zur Berechnung der Kräfte den Impulssatz (Band 3, Gl. (2.12))

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.44)$$

(man verwechsle den Impuls \mathbf{p} nicht mit dem Druck p !). Danach ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe aller

äußeren Kräfte, die auf einen materiellen Körper wirken. Dies gilt unabhängig davon, ob der Körper fest oder flüssig ist. Es wird sich zeigen, dass man mit Hilfe des Impulssatzes Aussagen über die Zustände am Rand eines Bereichs einer strömenden Flüssigkeit treffen kann, ohne Kenntnisse über die Verhältnisse (zum Beispiel die Geschwindigkeits- und die Druckverteilung) im Innern zu besitzen.

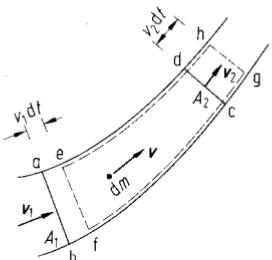


Abb. 1.33

Wir beschränken uns im folgenden auf stationäre Strömungen und betrachten eine abgeschlossene Flüssigkeitsmenge, die sich zum Zeitpunkt t im raumfesten Bereich $abcd$ einer Stromröhre befindet (Abb. 1.33). Ein Flüssigkeitsteilchen mit der Masse $dm = \rho dV$ und der Geschwindigkeit v besitzt den Impuls $d\mathbf{p} = \mathbf{v}dm = \rho \mathbf{v}dV$. Wir denken uns die Flüssigkeit aus unendlich vielen Flüssigkeitsteilchen aufgebaut und erhalten so den Gesamtimpuls der abgeschlossenen Flüssigkeitsmenge durch Summation (= Integration) über alle Teilchen:

$$\mathbf{p}(t) = \int_{abcd} \rho \mathbf{v}dV. \quad (1.45)$$

Die abgeschlossene Flüssigkeitsmenge bewegt sich in der Stromröhre und befindet sich zum Zeitpunkt $t + dt$ im Bereich $efgh$. Dann hat sie den Impuls

$$\mathbf{p}(t + dt) = \int_{efgh} \rho \mathbf{v}dV. \quad (1.46)$$

Zerlegt man die Volumenintegrale in (1.45) und (1.46) in je zwei Teilintegrale (Abb. 1.33), dann erhält man für die Impulsänderung

$$dp = p(t + dt) - p(t)$$

$$= \left[\int_{efcd} \varrho \mathbf{v} dV + \int_{dcgh} \varrho \mathbf{v} dV \right] - \left[\int_{abfe} \varrho \mathbf{v} dV + \int_{efcd} \varrho \mathbf{v} dV \right]. \quad (1.47)$$

In den infinitesimalen Bereichen $abfe$ bzw. $dcgh$ dürfen die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 bzw. \mathbf{v}_2 als konstant betrachtet werden. Somit gilt

$$\int_{abfe} \varrho \mathbf{v} dV = \varrho \mathbf{v}_1 A_1 v_1 dt, \quad \int_{dcgh} \varrho \mathbf{v} dV = \varrho \mathbf{v}_2 A_2 v_2 dt. \quad (1.48)$$

Da die Strömung stationär ist, sind wegen $\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t)$ die Integrale über den Bereich $efcd$ in (1.47) gleich. Die Änderung des Impulses im Zeitintervall dt ist daher durch

$$dp = (\varrho A_2 v_2 \mathbf{v}_2 - \varrho A_1 v_1 \mathbf{v}_1) dt \quad (1.49)$$

gegeben. Das Produkt ϱAv ist nach der Kontinuitätsgleichung (1.31) konstant. Es stellt den *Massenstrom*, d.h. die pro Zeiteinheit durch einen festen Querschnitt strömende Masse dar. Mit der Bezeichnung

$$\dot{m} = \varrho Av = \varrho Q \quad (1.50)$$

(man beachte, dass der Punkt hier *keine* Zeitableitung kennzeichnet) erhalten wir dann aus (1.49)

$$\frac{dp}{dt} = \varrho Q(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

Einsetzen in (1.44) liefert den *Impulssatz*

$$\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (1.51)$$

Er lautet in Komponenten

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{m}(v_{2x} - v_{1x}), \\ F_y &= \dot{m}(v_{2y} - v_{1y}), \\ F_z &= \dot{m}(v_{2z} - v_{1z}). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Die resultierende Kraft \mathbf{F} auf die abgeschlossene Flüssigkeitsmenge bewirkt deren Impulsänderung. Sie setzt sich aus den Volumenkräften und den an der Oberfläche angreifenden Druckkräften zusammen.

Bei der praktischen Anwendung des Impulssatzes wählt man ein raumfestes *Kontrollvolumen* (zum Beispiel das Volumen $abcd$ in Abb. 1.33). Die Terme auf der rechten Seite von (1.51) lassen sich als der pro Zeiteinheit aus dem Kontrollvolumen *ausfließende Impuls* $\dot{m}\mathbf{v}_2$ bzw. der in das Kontrollvolumen *einfließende Impuls* $\dot{m}\mathbf{v}_1$ deuten. Demnach ist die resultierende Kraft \mathbf{F} auf die im Kontrollvolumen enthaltene Flüssigkeit gleich der Differenz aus den ausfließenden bzw. einfließenden Impulsen.

Wir wenden den Impulssatz auf die stationäre Strömung einer Flüssigkeit in einem Rohrkrümmer an, der sich in einer horizontalen Ebene befindet (Abb. 1.34a). Die Querschnittsfläche des Rohres verändert sich vom Wert A_1 an der Stelle ① auf den Wert A_2 an der Stelle ②. Die Einströmgeschwindigkeit v_1 und der statische Druck p_1 sind gegeben. Wir wollen die Kraft bestimmen, die von der Flüssigkeit im Bereich ① bis ② auf den Krümmer ausgeübt wird.

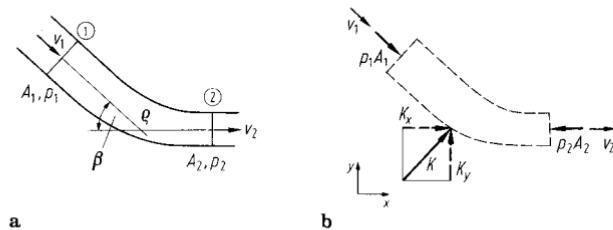


Abb. 1.34

Um diese Kraft zu bestimmen, wählen wir ein Kontrollvolumen gemäß Abb. 1.34b. Die Ausflussgeschwindigkeit v_2 ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 .$$

Der zugehörige statische Druck p_2 folgt aus der Bernoullischen Gleichung:

$$\frac{1}{2} \varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + p_2 \rightarrow p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \varrho (v_1^2 - v_2^2).$$

Die resultierende Kraft auf die Flüssigkeit setzt sich aus den Druckkräften $p_1 A_1$ und $p_2 A_2$ in den Endquerschnitten sowie der vom Krümmer auf die Mantelfläche ausgeübten Kraft \mathbf{K} zusammen (Abb. 1.34b). Damit lautet der Impulssatz (1.51)

$$\rightarrow: p_1 A_1 \cos \beta - p_2 A_2 + K_x = \dot{m} (v_2 - v_1 \cos \beta),$$

$$\uparrow: -p_1 A_1 \sin \beta + K_y = \dot{m} v_1 \sin \beta.$$

Die gesuchte Kraft auf den Krümmer hat wegen $\text{actio} = \text{reactio}$ den gleichen Betrag wie \mathbf{K} , ist aber entgegengesetzt gerichtet. Wenn wir die Vorzeichen von K_x und K_y umdrehen, dann erhalten wir die Komponenten der Kraft auf den Krümmer. Mit $\dot{m} = \varrho A_1 v_1$ ergibt sich

$$K_x = p_1 A_1 \cos \beta - p_2 A_2 - \varrho A_1 v_1 (v_2 - v_1 \cos \beta),$$

$$K_y = -p_1 A_1 \sin \beta - \varrho A_1 v_1^2 \sin \beta.$$

Im Sonderfall eines Halbkreiskrümmers mit konstanter Querschnittsfläche A sind die Geschwindigkeit v und der Druck p konstant. Dann erhält man mit $\beta = \pi$:

$$K_x = -2A(p + \varrho v^2), \quad K_y = 0.$$

Mit Hilfe des Impulssatzes kann man in einfacher Weise die Kraft ermitteln, die von einer nach Abb. 1.35a aus einem Behälter ausströmenden Flüssigkeit (vgl. Abb. 1.29a) auf dessen Wände ausgeübt wird. Mit dem Kontrollvolumen nach Abb. 1.35b folgt die Kraft F auf die Flüssigkeit aus dem Impulssatz in horizontaler

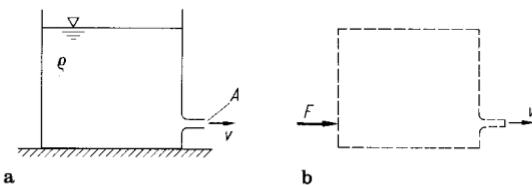


Abb. 1.35

Richtung:

$$\rightarrow: F = \varrho A v^2.$$

Die Kraft auf den Behälter ist entgegengesetzt gerichtet und ergibt sich mit $v^2 = 2gh$ zu $F = 2\varrho ghA$. Wenn der Behälter auf einer glatten Unterlage steht, bewegt er sich unter der Wirkung dieser Kraft nach links.

B1.13

Beispiel 1.13 Ein Wasserstrahl tritt mit der Geschwindigkeit v aus einer Düse (Querschnittsfläche A) und trifft auf eine Turbinenschaufel (Abb. 1.36a). Dort wird er symmetrisch geteilt und umgelenkt (ebenes Problem).

Man bestimme die vom Strahl auf die ruhende Schaufel ausgeübte Kraft. Wie groß ist die Kraft, wenn sich die Schaufel mit der Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegt? Bei welcher Geschwindigkeit v_0^* wird die Leistung der Kraft maximal?

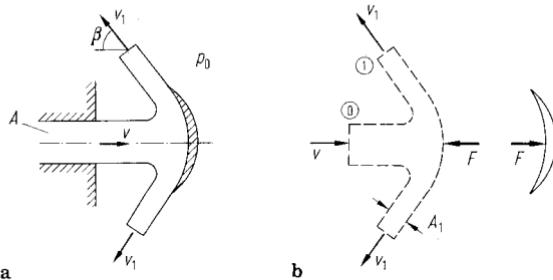


Abb. 1.36

Lösung Der Atmosphärendruck p_0 wirkt von allen Seiten und braucht daher nicht berücksichtigt zu werden. Aus der Bernoulli'schen Gleichung für die Stromlinie von ① nach ② (Abb. 1.36b) erhalten wir mit $p_1 = p_0$ für die Geschwindigkeit im umgelenkten Strahl $v_1 = v$. Damit liefert die Kontinuitätsgleichung $A_1 = A/2$, und die Massenströme in den Strahlen sind durch

$$\dot{m} = \varrho A v, \quad \dot{m}_1 = \varrho A_1 v_1 = \varrho A v/2$$

gegeben.

Die von der Schaufel auf das Wasser ausgeübte Kraft F folgt mit dem Kontrollvolumen nach Abb. 1.36b aus dem Impulssatz:

$$\rightarrow: -F = -2\dot{m}_1 v_1 \cos \beta - \dot{m}v \rightarrow \underline{\underline{F = (1 + \cos \beta) \varrho A v^2}}.$$

Die Kraft auf die Schaufel ist entgegengesetzt gleich groß.

Wenn sich die Schaufel mit der Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegt, dann beträgt die Auftreffgeschwindigkeit des Strahls $v - v_0$, und die Kraft ergibt sich zu

$$\underline{\underline{F = (1 + \cos \beta) \varrho A (v - v_0)^2}}.$$

Die Leistung dieser Kraft (vgl. Band 3, Gl. (1.72)) ist durch

$$P = Fv_0 = (1 + \cos \beta) \varrho A (v - v_0)^2 v_0$$

gegeben. Sie wird maximal für

$$\frac{dP}{dv_0} = 0 \rightarrow \underline{\underline{v_0^* = \frac{v}{3}}}.$$

Beispiel 1.14 Ein horizontaler Wasserstrahl (Querschnittsfläche A) trifft mit der Geschwindigkeit v auf eine Schneide S und teilt sich dort (Abb. 1.37a). Ein Teil des Strahls bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_2 entlang der Schneide, der andere Teil wird um den Winkel α abgelenkt und besitzt die Geschwindigkeit v_1 .

Wie groß ist das Verhältnis $\mu = A_1/A$? Welche Kraft wirkt auf die Schneide?

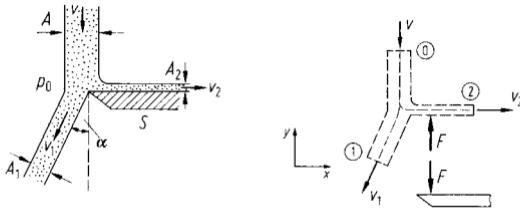


Abb. 1.37 a b

Lösung Aus der Bernoullischen Gleichung für die Stromlinien von ① nach ② bzw. von ① nach ② (Abb. 1.37b) erhalten wir zunächst mit $p_1 = p_0$ und $p_2 = p_0$ für die Geschwindigkeiten

$$v_1 = v_2 = v.$$

B1.14

Damit liefert die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = A v \rightarrow A_1 + A_2 = A.$$

Für die Massenströme in den Strahlen erhält man

$$\dot{m} = \varrho A v,$$

$$\dot{m}_1 = \varrho A_1 v_1 = \mu \dot{m},$$

$$\dot{m}_2 = \varrho A_2 v_2 = (1 - \mu) \dot{m}.$$

Wir betrachten nun das Kontrollvolumen nach Abb. 1.37b. Unter Beachtung, dass von der Schneide keine Kraft in x -Richtung auf die Flüssigkeit ausgeübt wird (reibungsfreie Flüssigkeit), lautet der Impulssatz

$$\rightarrow : 0 = -\dot{m}_1 v_1 \sin \alpha + \dot{m}_2 v_2 = -[\mu \sin \alpha - (1 - \mu)] \dot{m} v,$$

$$\uparrow : F = -\dot{m}_1 v_1 \cos \alpha + \dot{m} v = (1 - \mu \cos \alpha) \dot{m} v.$$

Die erste Gleichung liefert das Teilungsverhältnis μ :

$$\mu \sin \alpha - (1 - \mu) = 0 \rightarrow \mu = \frac{1}{\underline{1 + \sin \alpha}}.$$

Damit folgt aus der zweiten Gleichung die Kraft

$$F = (1 - \mu \cos \alpha) \varrho A v^2 = \frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{\underline{1 + \sin \alpha}} \varrho A v^2.$$

B1.15 **Beispiel 1.15** Ein mit Flüssigkeit gefülltes, horizontales Rohr (Querschnittsfläche A_1) mündet in einer Düse (Querschnittsfläche A_2). Es wird durch Hineinschieben eines Kolbens geleert (Abb. 1.38a).

Welche Kolbenkraft F_K ist erforderlich, um den Kolben mit konstanter Geschwindigkeit v_K zu bewegen, und welche Lagerreaktionen treten dabei in B und C auf?

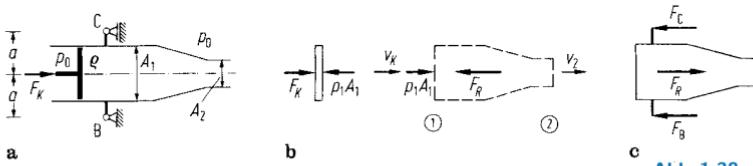


Abb. 1.38

Lösung Der Atmosphärendruck p_0 wirkt von allen Seiten und braucht daher nicht berücksichtigt zu werden. Die Kolbenkraft ist durch $F_K = p_1 A_1$ bestimmt (Abb. 1.38b). Aus der Kontinuitäts-Gleichung und der Bernoullischen Gleichung für eine Stromlinie von ① nach ② folgen

$$A_1 v_K = A_2 v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_K, \\ \frac{1}{2} \varrho v_K^2 + p_1 = \frac{1}{2} \varrho v_2^2 \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{2} \varrho v_K^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Damit wird

$$\underline{\underline{F_K}} = p_1 A_1 = \frac{1}{2} \varrho A_1 v_K^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Der Impulssatz für das Kontrollvolumen nach Abb. 1.38b liefert mit $\dot{m} = \varrho A_1 v_K$ die vom Rohr auf die Flüssigkeit ausgeübte Kraft F_R :

$$\rightarrow: p_1 A_1 - F_R = \dot{m} (v_2 - v_K) \quad \rightarrow \quad F_R = \frac{1}{2} \varrho A_1 v_K^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2.$$

Die entgegengesetzt gleich große Kraft übt die Flüssigkeit auf das Rohr aus (Abb. 1.38c). Damit folgt aus Symmetriegründen

$$\underline{\underline{B = C}} = \frac{1}{2} F_R = \frac{1}{4} \varrho A_1 v_K^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2.$$

1.3.3 Strömung mit Energieverlusten

1.3.3.1 Allgemeines

In einer zähen Flüssigkeit wirken zwischen den sich bewegenden Flüssigkeitsteilchen Tangentialkräfte, die Reibungswiderstände darstellen. Ihre Größe hängt von der Änderung der Geschwindigkeit der strömenden Flüssigkeit normal zur Bewegungsrichtung ab. Um dies zu zeigen, betrachten wir den Scherversuch nach Abb. 1.39 für eine Newtonsche Flüssigkeit. Eine zähe Flüssigkeit

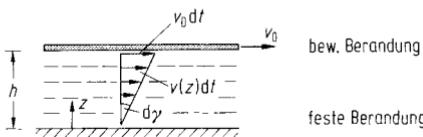


Abb. 1.39

haftet an den Berandungen. Sie besitzt also an der bewegten Berandung die Geschwindigkeit v_0 und ist an der festen Berandung in Ruhe. Dazwischen hat die Geschwindigkeit v bei einer *einfachen Scherströmung* überall die gleiche Richtung wie v_0 und ist über den Abstand h linear verteilt:

$$v(z) = \frac{z}{h} v_0.$$

Im Zeitintervall dt bewegt sich die obere Platte um den Weg $v_0 dt$ nach rechts. Aus dem zugehörigen Winkel $d\gamma = v_0 dt / h$ ergibt sich die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma} = d\gamma / dt = v_0 / h$. Wegen $dv/dz = v_0 / h$ gilt auch $\dot{\gamma} = dv/dz$, und aus (1.1) folgt damit schließlich

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz}. \quad (1.53)$$

Somit ist bei einer Newtonschen Flüssigkeit die Schubspannung proportional zur Geschwindigkeitsänderung normal zur Bewegungsrichtung.

Bei einer reibungsfreien Strömung werden die Schubspannungen vernachlässigt, und man nimmt an, dass die Flüssigkeit mit endlicher Geschwindigkeit tangential an einer sie begrenzenden Wand entlangströmt (Abb. 1.40a). Bei einer realen Strömung tritt dagegen immer innere Reibung auf. Da die Flüssigkeit an der Wand haftet, sinkt die Geschwindigkeit innerhalb eines gewissen Bereichs auf den Wert Null ab (Abb. 1.40b). Dieser Bereich heißt

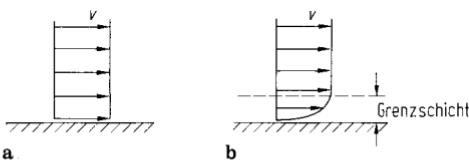


Abb. 1.40

Grenzschicht. Dies bedeutet, dass die Idealisierung der reibungsfreien Strömung nur dann zulässig ist, wenn die Dicke der Grenzschicht sehr klein gegen die übrigen Abmessungen des Strömungsfeldes ist.

Bei der Bewegung einer viskosen Flüssigkeit treten wegen der inneren Reibung Energieverluste auf, so dass zur Aufrechterhaltung der Strömung eine Energiezufuhr (z.B. durch einen Höhenunterschied oder einen Druckgradienten) erforderlich ist. Beispiele dafür sind die Bewegungen von Flüssigkeiten in Rohren oder Gerinnen (Kanälen, Flüssen). Entsprechend muss auch bei der Bewegung eines festen Körpers in einer ruhenden Flüssigkeit Energie aufgewendet werden, damit dieser nicht zum Stillstand kommt.

1.3.3.2 Verallgemeinerte Bernoullische Gleichung

Nach der Bernoullischen Gleichung (1.36) ist für eine reibungsfreie Flüssigkeit die „Strömungsenergie“ längs einer beliebigen Stromlinie konstant. Bei realen (zähen) Flüssigkeiten wird allerdings ein Teil dieser Energie durch innere Reibung in andere Energieformen (z.B. Wärme) umgewandelt. Daher ist für zähe Flüssigkeiten die Summe aus kinetischer, potentieller und Druckenergie nicht konstant, sondern sie nimmt in Strömungsrichtung ab. Man kann dies in der Bernoullischen Gleichung dadurch berücksichtigen, dass man einen positiven Term Δp_v einführt, der den Energieverlust darstellt (dieser hängt im allgemeinen vom Abstand der Bezugspunkte auf der Leitstromlinie ab). Damit erhält man die *verallgemeinerte Bernoullische Gleichung*

$$\frac{1}{2} \varrho v_1^2 + \varrho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + \varrho g z_2 + p_2 + \Delta p_v. \quad (1.54)$$

Da man die auf das Volumen bezogene Energie als Druck deuten kann (vgl. Abschn. 1.2.1 und 1.3.2.3), nennt man Δp_v auch *Druckverlust*. Er lässt sich durch die dimensionslose *Druckverlustzahl* ζ charakterisieren. Man erhält sie dadurch, dass man den Druckverlust auf den Staudruck – zum Beispiel an der Stelle ① – bezieht:

$$\zeta = \frac{\Delta p_v}{\varrho v_1^2/2}. \quad (1.55)$$

In einem Anwendungsbeispiel betrachten wir die Strömung einer Flüssigkeit in einem horizontalen Rohr, dessen Querschnittsfläche sich nach Abb. 1.41 plötzlich von A_1 auf A_2 vergrößert. Vor der Querschnittsänderung sind die Geschwindigkeit bzw. der Druck durch v_1 bzw. p_1 gegeben. Die Flüssigkeit strömt in Form eines Strahls in den Bereich mit dem größeren Querschnitt ein. Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit seitlich vom Strahl ruht. Dann herrscht dort der gleiche Druck wie im Strahl, nämlich p_1 . Stromab von der Erweiterung vermischt sich der Strahl aufgrund der inneren Reibung unter starker Wirbelbildung mit der ihn umgebenden Flüssigkeit. Erst am Ende eines Übergangsgebietes stellt sich wieder eine nahezu gleichförmige Strömung mit der Geschwindigkeit v_2 und dem Druck p_2 ein. Da bei einer reibungsbehafteten Flüssigkeit die Teilchen an der Rohrwand haften, sind v_1 bzw. v_2 hier die Mittelwerte der Geschwindigkeitsverteilungen in den Querschnitten. Wir wollen im folgenden v_2 und p_2 sowie die Druckverlustzahl ζ bestimmen.

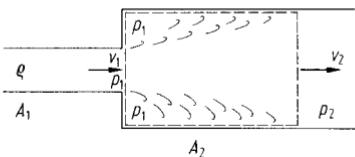


Abb. 1.41

Die Geschwindigkeit v_2 folgt aus der Kontinuitätsgleichung $v_1 A_1 = v_2 A_2$ zu

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1. \quad (1.56)$$

Durch die Wirbelbildung geht Strömungsenergie verloren. Daher darf die Bernoulli'sche Gleichung (1.36) nicht angewendet werden. Zur Ermittlung des Drucks p_2 können wir den Impulssatz auf das Kontrollvolumen nach Abb. 1.41 anwenden. Dabei vernachlässigen wir die resultierende Kraft der an der Mantelfläche des Kontrollvolumens angreifenden Schubspannungen. Dann lautet der Impulssatz

$$\rightarrow: p_1 A_2 - p_2 A_2 = \varrho A_2 v_2^2 - \varrho A_1 v_1^2. \quad (1.57)$$

Einsetzen von (1.56) liefert

$$p_2 = p_1 + \varrho v_2 (v_1 - v_2) = p_1 + \varrho v_1^2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right). \quad (1.58)$$

Wenn man nun v_2 und p_2 nach (1.56) und (1.58) in die verallgemeinerte Bernoullische Gleichung (1.54) einsetzt, erhält man mit $z_1 = z_2$

$$\Delta p_v = \frac{\varrho}{2} (v_1^2 - v_2^2) - (p_2 - p_1) = \frac{\varrho}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2. \quad (1.59)$$

Dieser Druckverlust wird auch als *Carnotscher Stoßverlust* bezeichnet. Die Druckverlustzahl ergibt sich nach (1.55) zu

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2. \quad (1.60)$$

Bei plötzlicher Verengung des Rohrquerschnitts tritt ebenfalls ein Verlust an Strömungsenergie auf. Dieser ist jedoch kleiner als der Verlust bei der plötzlichen Erweiterung. Durch allmähliche Querschnittsänderung können die Verluste stark herabgesetzt werden.

Beispiel 1.16 In einem Kanal mit der Querschnittsfläche A befindet sich ein keilförmiger Körper (Abb. 1.42a). Die strömende Flüssigkeit hat vor dem Keil die Geschwindigkeit v .

Welche Kraft wird von der Flüssigkeit auf den Keil ausgeübt?

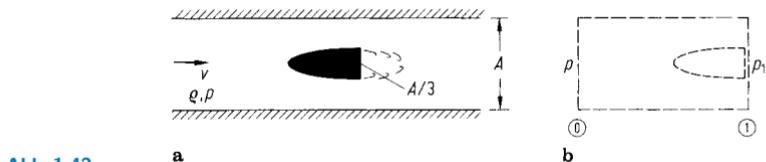


Abb. 1.42

Lösung Aus der Kontinuitätsgleichung und der Bernoullischen Gleichung für eine Stromlinie von ① nach ② (Abb. 1.42b) folgen

$$Av = \frac{2}{3}Av_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{3}{2}v,$$

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p = \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 \quad \rightarrow \quad p - p_1 = \frac{5}{8}\varrho v^2.$$

B1.16

Unmittelbar hinter dem Keil ruht die Flüssigkeit. Daher herrscht dort ebenfalls der Druck p_1 . Die vom Keil auf die Flüssigkeit ausgeübte Kraft folgt aus dem Impulssatz. Die Kraft auf den Keil ist entgegengesetzt gleich groß. Wenn wir die Reibung an den Kanalwänden und am Keil vernachlässigen, gilt mit dem Kontrollvolumen nach Abb. 1.42b für diese Kraft

$$\rightarrow: -F + (p - p_1)A = \varrho A v(v_1 - v) \rightarrow \underline{\underline{F = \frac{1}{8} \varrho A v^2}}.$$

1.3.3.3 Strömung in einem kreiszylindrischen Rohr

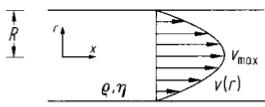
Wir betrachten nun die stationäre Strömung einer Newtonschen Flüssigkeit in einem horizontalen, zylindrischen Rohr mit Kreisquerschnitt (Radius R). Dabei nehmen wir an, dass die Stromlinien parallel zur Zylinderachse sind und die Geschwindigkeit v nur vom Abstand r abhängt (Abb. 1.43a). Die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich dann in Schichten, die sich nicht vermischen. Eine Strömung dieses Typs nennt man *Schichtenströmung* oder *laminare Strömung*.

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils $v(r)$ denken wir uns einen koaxialen Flüssigkeitszylinder mit der endlichen Länge Δl und dem Radius r aus der Flüssigkeit geschnitten (Abb. 1.43b). An den Stirnflächen wirken die Drücke p_1 bzw. p_2 . Auf der Mantelfläche des Zylinders wirkt die Schubspannung τ . Sie ist für eine Newtonsche Flüssigkeit entsprechend (1.53) durch

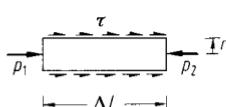
$$\tau(r) = \eta \frac{dv}{dr} \quad (1.61)$$

gegeben. Die Schubspannung ist demnach in der Mantelfläche des Zylinders konstant und liefert die resultierende Kraft

$$T = 2\pi r \Delta l \tau = 2\pi \eta \Delta l r \frac{dv}{dr}. \quad (1.62)$$



a



b

Abb. 1.43

Bei stationärer Strömung tritt keine Beschleunigung auf. Daher ist die Summe der am Zylinder angreifenden Kräfte Null:

$$\pi r^2 p_1 + T - \pi r^2 p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = - \frac{p_1 - p_2}{2\eta\Delta l} r. \quad (1.63)$$

Die Geschwindigkeit folgt mit $\Delta p = p_1 - p_2$ durch Integration zu

$$v(r) = - \frac{\Delta p}{4\eta\Delta l} r^2 + C. \quad (1.64)$$

Die Integrationskonstante C bestimmen wir aus der Bedingung, dass die Flüssigkeit an der Rohrwand haftet:

$$v(R) = 0 \quad \rightarrow \quad C = \frac{\Delta p}{4\eta\Delta l} R^2. \quad (1.65)$$

Damit ergibt sich das gesuchte Geschwindigkeitsprofil zu

$$v(r) = \frac{R^2 \Delta p}{4\eta\Delta l} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.66)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung hat somit die Form eines Rotationsparaboloids. Die maximale Geschwindigkeit tritt in der Rohrachse ($r = 0$) auf:

$$v_{\max} = \frac{R^2 \Delta p}{4\eta\Delta l}. \quad (1.67)$$

Da die Geschwindigkeit von innen nach außen abnimmt, ist $dv/dr < 0$. Somit fällt nach (1.63) der Druck in Strömungsrichtung: $p_2 < p_1$. Dieses Druckgefälle ist zur Aufrechterhaltung der Strömung erforderlich. Ebenfalls wegen $v'(r) < 0$ ist nach (1.62) $T < 0$. Daher wirkt die Schubspannung τ in Wirklichkeit entgegen der in Abb. 1.43b angenommenen Richtung. Dies ist auch anschaulich klar, da die langsameren äußeren Flüssigkeitsteilchen die schnelleren inneren Teilchen durch die Reibung verzögern.

Wir wollen nun noch den Volumenstrom Q bestimmen. Das pro Zeiteinheit durch einen infinitesimalen Kreisring mit dem Radius r und der Dicke dr strömende Volumen ist durch $dQ = 2\pi r dr v(r)$ gegeben. Den gesamten Volumenstrom erhält man durch Integration:

$$Q = \int_0^R 2\pi r v(r) dr \quad \rightarrow \quad Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta \Delta l}. \quad (1.68)$$

Diese Beziehung nennt man das *Gesetz von Hagen-Poiseuille* (Gottlieb Hagen, 1797–1884; Jean Louis Marie Poiseuille, 1799–1869). Nach (1.68) ist der Volumenstrom proportional zur vierten Potenz des Rohrradius. Daher wird zum Beispiel bei einer Verdoppelung des Radius die Durchflussmenge sechzehnmal so groß.

Für praktische Rechnungen bei Rohrströmungen ist es zweckmäßig, eine *Widerstandszahl* λ einzuführen, mit deren Hilfe man den Druckabfall im Rohr quantitativ erfasst. Sie wird durch

$$\Delta p = \lambda \frac{\Delta l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 \quad (1.69)$$

definiert. Dabei sind d der Durchmesser des Rohres und

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8\eta \Delta l} = \frac{1}{2} v_{\max} \quad (1.70)$$

die mittlere Geschwindigkeit. Die Widerstandszahl stellt somit einen Proportionalitätsfaktor dar für den Zusammenhang zwischen dem Druckabfall Δp längs einer Strecke Δl , dem Rohrdurchmesser d und dem mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} gebildeten Staudruck. Die Widerstandszahl λ hängt mit der entsprechend (1.55) gebildeten Druckverlustzahl $\zeta = \Delta p / (\rho \bar{v}^2 / 2)$ gemäß

$$\zeta = \lambda \frac{\Delta l}{d} \quad (1.71)$$

zusammen. Wenn man (1.69) in (1.70) einsetzt und nach λ auflöst, so erhält man

$$\lambda = \frac{64\eta}{\rho \bar{v} d}. \quad (1.72)$$

Da λ dimensionslos ist, muss auch die Größe

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta} \quad (1.73)$$

dimensionslos sein. Man nennt Re die *Reynoldszahl* (Osborne Reynolds, 1842–1912). Damit folgt für die Widerstandszahl

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (1.74)$$

Die Erfahrung zeigt, dass dieser Zusammenhang nur unterhalb einer bestimmten kritischen Reynoldszahl (also zum Beispiel bei hinreichend kleiner Strömungsgeschwindigkeit) gilt. Bei größeren Reynoldszahlen ist die Widerstandszahl größer als die nach (1.74) berechnete. Dabei ändert sich die Strömungsform: die laminare Strömung schlägt in *turbulente* Strömung um. Während sich bei laminarer Strömung alle Flüssigkeitsteilchen mit konstanter Geschwindigkeit auf achsparallelen Geraden bewegen, vermischen sich bei turbulenter Strömung die nebeneinanderfließenden Schichten ständig.

1.3.3.4 Strömung in offenen Gerinnen

Bei der Strömung in einem Rohr ist die Flüssigkeit überall von einer festen Rohrwand umgeben. Im Gegensatz dazu tritt bei der Strömung in offenen Gerinnen, wie zum Beispiel Flüssen oder Kanälen, eine freie Oberfläche auf. Sie stellt in den meisten praktisch wichtigen Fällen die Trennfläche zwischen Luft und Wasser dar. An ihr herrscht somit der Atmosphärendruck p_0 .

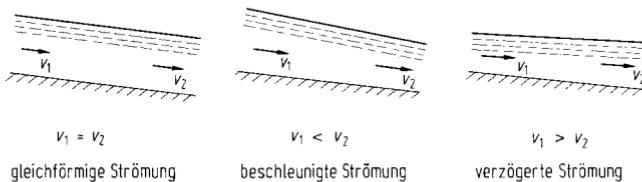


Abb. 1.44

Die Strömung in einem offenen Gerinne wird meist durch ein Gefälle verursacht. Beim Abwärtsfließen wird die potentielle Energie der höher liegenden Flüssigkeitsteilchen in kinetische Energie umgewandelt bzw. zur Überwindung der inneren Reibung aufgewendet. Wir wollen im folgenden voraussetzen, dass die Strömung stationär ist. Dann hängt auch der Volumenstrom Q für einen beliebigen Querschnitt nicht von der Zeit ab. Man nennt eine stationäre Strömung *gleichförmig*, wenn die Geschwindigkeit in Strömungsrichtung konstant ist ($v_2 = v_1$). Dagegen heißt sie *be-*

schleunigt, wenn die Geschwindigkeit zunimmt ($v_2 > v_1$) bzw. verzögert, wenn sie abnimmt ($v_2 < v_1$). Nach der Kontinuitätsgleichung ist bei einer gleichförmigen Strömung der Querschnitt konstant, während er bei einer beschleunigten (verzögerten) Strömung abnimmt (zunimmt), vgl. Abb. 1.44.

Wir wollen uns im folgenden mit der gleichförmigen Strömung in einem rechteckigen offenen Gerinne der Breite b befassen. Das Gerinne habe ein konstantes schwaches Gefälle, das durch den Winkel $\alpha \ll 1$ gegeben ist (Abb. 1.45a). Die konstante Wassertiefe sei t . Weiterhin sei v die mittlere Geschwindigkeit in einem Querschnitt. Wir wählen nun diejenige Stromlinie als Leitstromlinie, auf der die Geschwindigkeit der Teilchen gerade die mittlere Geschwindigkeit v ist. Wenn wir berücksichtigen, dass bei gleichförmiger Strömung die Geschwindigkeit konstant ist, dann erhalten wir aus der verallgemeinerten Bernoulli'schen Gleichung (1.54) für zwei Punkte ① und ② auf der Leitstromlinie zunächst

$$\varrho g z_1 + p_1 = \varrho g z_2 + p_2 + \Delta p_v. \quad (1.75)$$

Wir nehmen nun an, dass die Druckverteilung im Querschnitt durch die statische Druckverteilung nach (1.5) gegeben ist. Dann gilt auf der Leitstromlinie

$$p = p_1 = p_2 = p_0 + \varrho g t^*. \quad (1.76)$$

Ein Druckgefälle in Strömungsrichtung ist somit nicht vorhanden. Durch Einsetzen in (1.75) können wir den Energieverlust (= Druckverlust) bestimmen:

$$\Delta p_v = \varrho g(z_1 - z_2) = \varrho g \Delta l \sin \alpha. \quad (1.77)$$

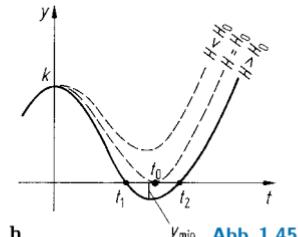
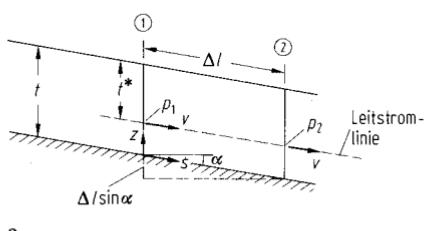


Abb. 1.45

Nach (1.37) stellt

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad (1.78)$$

die hydraulische Höhe dar. Mit p nach (1.76) und $z = t - t^*$ folgt daraus

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + t. \quad (1.79)$$

Da der Atmosphärendruck p_0 an jeder Stelle gleich ist, braucht er beim Vergleich der hydraulischen Höhen verschiedener Querschnitte nicht berücksichtigt zu werden. Somit vereinfacht sich (1.79) zu

$$H = v^2/2g + t.$$

Bei gleichförmiger Strömung sind die Geschwindigkeit v und die Tiefe t unabhängig vom Ort. Daher ist in diesem Fall die hydraulische Höhe konstant:

$$H = \frac{v^2}{2g} + t = \text{const}. \quad (1.80)$$

Die Geschwindigkeit v lässt sich durch den Volumenstrom Q ausdrücken:

$$Q = b t \cos \alpha v \approx b t v \quad \rightarrow \quad v = Q/(b t). \quad (1.81)$$

Durch Einsetzen in (1.80) erhält man schließlich

$$t^3 - H t^2 + k = 0 \quad \text{mit} \quad k = Q^2/(2g b^2). \quad (1.82)$$

Diese Beziehung muss bei gleichförmiger Strömung zwischen den Parametern b , t , Q und H erfüllt sein. Bei gegebenen Werten von b , t und Q können die Geschwindigkeit v aus (1.81) und die hydraulische Höhe H aus (1.80) bestimmt werden. Sind dagegen b , Q und H gegeben, so stellt (1.82) eine kubische Gleichung für die Wassertiefe t dar.

Um zu untersuchen, für welche Parameterwerte die Gleichung (1.82) positive reelle Lösungen t besitzt, skizzieren wir die Funk-

tion

$$y = t^3 - Ht^2 + k \quad (1.83)$$

für verschiedene Werte von H (Abb. 1.45b). Die Funktion $y(t)$ hat an der Stelle $t = 2H/3$ das Minimum

$$y_{\min} = -\frac{4H^3}{27} + \frac{Q^2}{2gb^2} \quad (1.84)$$

und bei $t = 0$ das Maximum $y_{\max} = k$. Damit positive Werte für die Wassertiefe existieren, muss $y_{\min} \leq 0$ gelten. Daher folgt nach (1.84) für die hydraulische Höhe

$$-\frac{4H^3}{27} + \frac{Q^2}{2gb^2} \leq 0 \quad \rightarrow \quad H \geq H_0 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}. \quad (1.85)$$

Die hydraulische Höhe, d.h. die Strömungsenergie, muss somit einen Mindestwert H_0 erreichen, damit eine gleichförmige Strömung möglich ist. Die zugehörigen Werte für die „Grenztiefe“ t_0 und die „Grenzgeschwindigkeit“ v_0 ergeben sich zu

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0 \quad \rightarrow \quad t_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}, \quad (1.86)$$

$$v_0 = \frac{Q}{bt_0} = \frac{1}{bt_0} \sqrt{gb^2 t_0^3} \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{gt_0}. \quad (1.87)$$

Ist $H > H_0$, so existieren zu einer gegebenen Strömungsenergie zwei verschiedene Wassertiefen t_1 und t_2 (Abb. 1.45b). Entweder fließt das Wasser bei einer kleinen Tiefe $t_1 < t_0$ mit großer Geschwindigkeit $v_1 > v_0$, oder es fließt bei einer großen Tiefe $t_2 > t_0$ mit kleiner Geschwindigkeit $v_2 < v_0$. Im ersten Fall spricht man von *schießendem Abfluss* (Wildbäche), im zweiten Fall von *strömendem Abfluss* (Flüsse).

In der Natur treten häufig Störungen der gleichförmigen Bewegung auf. So kann zum Beispiel ein kleiner Knick in der Sohle eine nahezu plötzliche Erhebung des Wasserspiegels verursachen (Abb. 1.46a). Diese Erscheinung wird als *Wassersprung* bezeichnet. Zur Untersuchung des Wassersprungs wenden wir den Im-

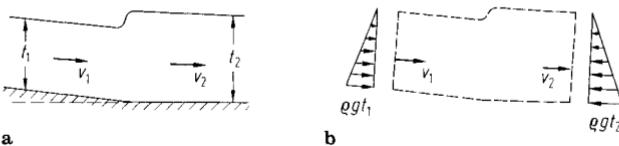


Abb. 1.46

pulssatz auf das in Abb. 1.46b dargestellte Kontrollvolumen an. Dabei nehmen wir wieder an, dass die Druckverteilung im Querschnitt durch die statische Druckverteilung nach (1.5) gegeben ist. Außerdem vernachlässigen wir die in Strömungsrichtung zeigende Komponente der Gewichtskraft (geringe Neigung!) sowie die Schubspannungen an den Berandungen des Kontrollvolumens. Dann lautet der Impulssatz:

$$\frac{1}{2} \rho g t_1^2 b - \frac{1}{2} \rho g t_2^2 b = \rho v_1 b t_1 (v_2 - v_1). \quad (1.88)$$

Wenn wir die Geschwindigkeit v_2 mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung

$$v_1 t_1 b = v_2 t_2 b \rightarrow v_2 = \frac{t_1}{t_2} v_1$$

eliminieren, so erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g(t_1 + t_2)(t_1 - t_2) &= v_1^2 \frac{t_1}{t_2} (t_1 - t_2) \\ \rightarrow t_2^2 + t_1 t_2 - \frac{2t_1 v_1^2}{g} &= 0. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Durch Auflösen dieser quadratischen Gleichung folgt für die Tiefe t_2 hinter dem Wassersprung

$$t_2 = -\frac{t_1}{2} \stackrel{(+)}{(-)} \sqrt{\frac{t_1^2}{4} + \frac{2t_1 v_1^2}{g}}. \quad (1.90)$$

Da t_2 positiv sein muss, ist nur das Pluszeichen vor der Wurzel physikalisch sinnvoll.

Vor dem Wassersprung fließt das Wasser bei der kleineren Tiefe $t_1 < t_2$ mit der größeren Geschwindigkeit $v_1 > v_2$. Daher tritt ein Wassersprung nur bei einem schießenden Abfluss auf.

1.4 Weiterführende Literatur

- BECKER, E., *Technische Strömungslehre*, Teubner, Stuttgart 1977
- BECKER, E., PILTZ, E., *Übungen zur Technischen Strömungsmechanik*, Teubner, Stuttgart 1971
- BATCHELOR, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press 1967
- BOLLRICH, G., *Technische Hydromechanik 1*, Verlag für Bauwesen, Berlin 2000
- GUYON, E., HULIN, J.P., PETIT, L., *Hydrodynamik*, Vieweg, Wiesbaden 1994
- OERTL, H., *Strömungsmechanik*, Springer, Berlin 1995
- OERTL, H. ET AL., *Übungsbuch Strömungsmechanik*, Vieweg, Wiesbaden 1998
- PNUELI, D., GUTFINGER, C., *Fluid Mechanics*, Cambridge University Press 1997
- SCHRÖDER, R., *Technische Hydraulik*, Springer, Berlin 1994
- SCHRÖDER, W., *Fluidmechanik*, Wissenschaftsverlag, Aachen 2004
- SPURK, J., *Strömungslehre*, Springer, Berlin 1996
- SPURK, J., *Aufgaben zur Strömungslehre*, Springer, Berlin 1996
- ZIEREP, J., *Grundzüge der Strömungsmechanik*, Springer, Berlin 1997